



การลดสัญญาณรบกวนภาพถ่ายรังสีเอ็กซ์ด้วยฟังก์ชันหัดตัวชนิด
หลายตัวแปรในปริภูมิเวฟเล็ต

โดย

พิชิต กิตติสุวรรณ



สนับสนุนงบประมาณโดย

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลรัตนโกสินทร์

ประจำปีงบประมาณ 2557

X-Ray Image Denoising using Multivariate Shrinkage Function in Wavelet Domain

By

Pichid Kittisuwon



Granted by

Rajamangala University of Technology Rattanakosin

Fiscal year 2014

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยทุนวิจัยจาก สำนักวิจัยและพัฒนา มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลรัตนโกสินทร์ซึ่งผู้วิจัยต้องขอขอบพระคุณไว้ ณ ที่นี้ด้วย

นอกจากนี้ข้าพเจ้าขอกราบขอบพระคุณ ครู อาจารย์ ในทุกระดับ และ บิดา มารดา ผู้ซึ่งได้ให้การอบรม เลี้ยงดู และ การศึกษาแก่ข้าพเจ้ามาในอดีตด้วยโดยข้าพเจ้าขออุทิศคุณความดีที่มีอยู่ในงานวิจัยชิ้นนี้ให้กับท่านเหล่านั้นทั้งหมด

สุดท้ายนี้ข้าพเจ้าหวังเป็นอย่างยิ่งว่างานวิจัยชิ้นนี้คงจะเป็นประโยชน์ทั้งในด้านการประยุกต์และต่อยอดองค์ความรู้ใหม่ให้ยิ่งขึ้นไปได้บ้างไม่มากก็น้อย

พิชิต กิตติสุวรรณ

สิงหาคม 2557



บทคัดย่อ

รหัสโครงการ : Social_008/2557

ชื่อโครงการ : การลดสัญญาณรบกวนภาพถ่ายรังสีเอ็กซ์ด้วยฟังก์ชันหัดตัวชนิดหลายตัวแปรใน
ปริภูมิเวฟเล็ต

ชื่อนักวิจัย : ดร. พิชิต กิตติสุวรรณ

การบิดเบือนของภาพทางการแพทย์โดยสัญญาณรบกวนนั้นเป็นเรื่องปกติที่จะเกิดขึ้นใน
ขั้นตอนของกระบวนการหรือการส่งผ่าน ดังนั้นงานวิจัยชิ้นนี้จะมุ่งเน้นไปที่การลดสัญญาณรบกวน
ภาพถ่ายรังสีเอ็กซ์บนพื้นฐานของเวฟเล็ตโดยใช้เทคนิคแบบเบส ในความเป็นจริงแล้วหนึ่งในสิ่งที่
สำคัญของขั้นตอนการลดสัญญาณรบกวนภาพแบบเบสคือการประมาณความแปรปรวนท้องถิ่นของ
ภาพ ซึ่งในงานวิจัยนี้เราจะใช้การประมาณแบบภายหลังสูงสุดในการคำนวณความแปรปรวนที่สังเกต
ได้ท้องถิ่น โดยใช้การกระจายตัวก่อนหน้าแบบพาราเมตริกสำหรับความแปรปรวนที่สังเกตได้ท้องถิ่นและ
การกระจายตัวแบบลาปลาซหรือเกาส์สำหรับสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่มีสัญญาณรบกวน



คำสำคัญ : การประมาณแบบเบส การแปลงเวฟเล็ต

E-mail Address : Pichid.Kit@rmutr.ac.th

ระยะเวลาโครงการ : ตุลาคม พ.ศ. 2556 ถึง กันยายน พ.ศ. 2557

Abstract

Code of project : Social.008/2557
Project Name : X-Ray Image Denoising using Multivariate Shrinkage Function
in Wavelet Domain
Researcher name : Dr. Pichid Kittisuwan

The distortion of medical images by noise is common during its processing and transmission. So, this research is concerned with wavelet-based X-ray image denoising using Bayesian techniques. Indeed, one of the cruxes of the Bayesian image denoising algorithms is to estimate the local variance of the image. Here, we employ maximum a posterior (MAP) estimation to calculate local observed variance with Pareto distribution prior for local observed variance and Laplacian or Gaussian distribution for noisy wavelet coefficients.

Keywords: Bayesian Estimation, Wavelet Transform

E-mail Address : Pichid.Kit@rmutr.ac.th
Period of project : October 2013 - September 2014

สารบัญ

	หน้า
กิตติกรรมประกาศ	ก
บทคัดย่อภาษาไทย	ข
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	ค
สารบัญ	ง
สารบัญตาราง	ฉ
สารบัญภาพ	ช
บทที่ 1 บทนำ	1
1. ความสำคัญและที่มาของปัญหา	1
2. วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัย	1
3. ขอบเขตของการวิจัย	1
4. ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	1
บทที่ 2 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง	2
1. การลดสัญญาณรบกวนภาพในปริภูมิเวฟเล็ต	2
2. การแบ่งซีดีเริ่มเปลี่ยนเวฟเล็ต	2
3. ความเสี่ยงแบบเบสส์	3
4. ความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตระหว่างสเกล	3
5. ฟังก์ชันหัดตัวชนิดหลายตัวแปร	4
6. การประมาณพารามิเตอร์ทางสถิติสำหรับฟังก์ชันหัดตัว	7
บทที่ 3 วิธีการและขั้นตอนการดำเนินงาน	8
1. ความแปรปรวนท้องถิ่น	8
2. กรณีสลาปลาซ-พาวเรโต	9
3. กรณีสเกาส์-พาวเรโต	10
บทที่ 4 ผลการทดลอง	12
1. ผลการทดสอบภาพ Lena	12

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
2. ผลการทดสอบภาพ X-ray1	16
3. ผลการทดสอบภาพ X-ray2	20
บทที่ 5 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ	24
1. สรุปผลการวิจัย	24
2. อธิบายผลการวิจัย	24
3. ข้อเสนอแนะ	24
บรรณานุกรม	25
ภาคผนวก ก การประมาณแบบเบส์	26
ภาคผนวก ข ตัวอย่างฟังก์ชันหาค่าในตัวในอดีต	30
ประวัตินักวิจัย	43



สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
1	ค่า PSNR ผลการทดสอบประสิทธิภาพวิธีลดสัญญาณรบกวนชนิดต่างๆกับภาพ Lena 12
2	ค่า PSNR ผลการทดสอบประสิทธิภาพวิธีลดสัญญาณรบกวนชนิดต่างๆกับภาพ X-ray1 16
3	ค่า PSNR ผลการทดสอบประสิทธิภาพวิธีลดสัญญาณรบกวนชนิดต่างๆกับภาพ X-ray2 20



สารบัญภาพ

ภาพที่	หน้า
1. จากซ้ายไปขวาแสดงฟังก์ชันหัดตัว soft-thresholding และ hard-thresholding	2
2. ลักษณะความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตระหว่างสเกล (parent and child relation)	4
3. ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วมของ radial exponential random vectors ในกรณี $d = 2$ ตัวแปร	6
4. ฟังก์ชันหัดตัวชนิดหลายตัวแปร Bishrink กรณี $d = 2$ -Dimension	6
5. ความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่มีสัญญาณรบกวนท้องถิ่น	8
6. ภาพ Lena ขนาด 512X512 จุดภาพ	13
7. ภาพ Lena ที่มีสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 10$	13
8. แสดงวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบ LAWMAP [6] (PSNR=35.17)	14
9. แสดงวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบ MLAP-MMSE [8] (PSNR=35.27)	14
10. แสดงวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบ Laplacian-Pareto (PSNR=35.35)	15
11. แสดงวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบ Gaussian-Pareto (PSNR=35.17)	15
12. ภาพ X-ray1 ขนาด 512X512 จุดภาพ	16
13. ภาพ X-ray1 ที่มีสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 15$	17
14. แสดงวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบ LAWMAP [6] (PSNR=38.51)	17
15. แสดงวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบ MLAP-MMSE [8] (PSNR=39.43)	18
16. แสดงวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบ Laplacian-Pareto (PSNR=39.44)	18
17. แสดงวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบ Gaussian-Pareto (PSNR=37.00)	19
18. ภาพ X-ray2 ขนาด 512X512 จุดภาพ	20
19. ภาพ X-ray2 ที่มีสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 5$	21
20. แสดงวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบ LAWMAP [6] (PSNR=44.88)	21
21. แสดงวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบ MLAP-MMSE [8] (PSNR=44.94)	22
22. แสดงวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบ Laplacian-Pareto (PSNR=45.00)	22
23. แสดงวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบ Gaussian-Pareto (PSNR=43.00)	23

บทที่ 1

บทนำ

1. ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ปัจจุบันวิวัฒนาการทางการแพทย์ได้พัฒนาไปอย่างมาก โดยเฉพาะการนำเทคโนโลยีใหม่ๆ มาช่วยในการวินิจฉัยโรคให้แม่นยำขึ้น เทคโนโลยีภาพถ่ายรังสีเอ็กซ์ (X-ray image) ก็เช่นเดียวกัน เทคโนโลยีนี้ได้ถูกนำมาใช้ช่วยวินิจฉัยโรคอย่างกว้างขวาง เพราะเป็นเทคโนโลยีที่มีราคาถูกและบุคคลทั่วไปสามารถเข้าถึงได้ง่ายกว่าเทคโนโลยีภาพถ่ายทางการแพทย์ที่ถูกพัฒนา ขึ้นมาในยุคหลัง เช่น MRI หรือ CT scan ซึ่งมีราคาในการให้บริการที่สูงอีกทั้งยังจำกัดอยู่ตามโรงพยาบาลใหญ่ๆ เท่านั้น อย่างไรก็ตาม ปัญหาสำคัญที่เกิดขึ้นกับ ภาพถ่ายรังสีเอ็กซ์ ก็คือ ภาพชนิดนี้มักจะปรากฏสัญญาณรบกวนขึ้นที่ภาพจำนวนมากนำมาซึ่งความไม่ชัดเจนของภาพซึ่งอาจทำให้การวินิจฉัยโรคที่เกิดขึ้นผิดพลาดได้ ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงมุ่งเน้นที่จะหาวิธีลดสัญญาณรบกวนของภาพถ่ายรังสีเอ็กซ์ เพื่อให้ได้ภาพถ่ายที่ชัดเจนมากที่สุด อันนำมาซึ่งการวินิจฉัยโรคที่แม่นยำขึ้นนั่นเอง

2. วัตถุประสงค์การวิจัย

2.1 ศึกษา ค้นคว้า วิจัย และ ออกแบบวิธีลดสัญญาณรบกวนของภาพถ่ายรังสีเอ็กซ์ โดยใช้วิธีการฟังก์ชันหดตัวชนิดหลายตัวแปรในปริภูมิเวฟเล็ต

2.2 เผยแพร่เทคโนโลยีที่คิดค้นออกสู่วงการวิชาการ เช่น บทความวิชาการ หรือวารสารวิชาการ เพื่อการต่อยอดความรู้และใช้ให้เป็นต่อไปในอนาคต

3. สมมติฐานการวิจัย

ในงานวิจัยนี้มีสมมติฐานว่าเมื่อสร้างวิธีประมาณตัวแปรทางสถิติ คือ ความแปรปรวนท้องถิ่นแบบมาใหม่แล้วเมื่อนำไปประยุกต์ใช้กับฟังก์ชันหดตัวที่ใช้เป็นตัวอย่างเปรียบเทียบ ในการลดสัญญาณรบกวนภาพทางการแพทย์แล้วจะสามารถเพิ่มประสิทธิภาพการลดสัญญาณรบกวนภาพทางการแพทย์ได้เมื่อเทียบกับวิธีดั้งเดิม

4. กรอบแนวคิดการวิจัย

สร้างวิธีใหม่สำหรับใช้ลดสัญญาณรบกวนภาพถ่ายรังสีเอ็กซ์ โดยใช้เทคนิคที่เกี่ยวกับฟังก์ชันหดตัวชนิดหลายตัวแปรในปริภูมิเวฟเล็ตซึ่งวิธีใหม่ที่ได้นี้ สามารถประมวลผลได้จริงภายใต้สภาวะการจำลอง (simulation) ที่สมมุติขึ้น

5. นิยามศัพท์

ภาพที่มีสัญญาณรบกวน หมายถึง ภาพดิจิทัลที่มีสัญญาณรบกวนที่เกิดจากสัญญาณรบกวนเกาส์สีขาวแบบบวก

สัญญาณรบกวนเกาส์สีขาวแบบบวก (additive white Gaussian noise, AWGN) หมายถึง สัญญาณรบกวนที่มีลักษณะการกระจายตัวแบบเกาส์ที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์และมีค่าความแปรปรวนใดๆ การแปลงเวฟเล็ต หมายถึง ผลการแปลงเว็ตเล็ตแบบวิยุติ (discrete wavelet transform)



บทที่ 2

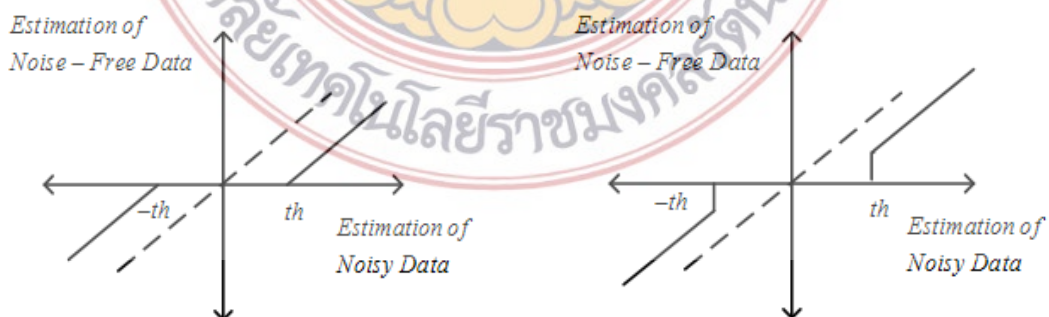
ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

1. การลดสัญญาณรบกวนภาพในปริภูมิเวฟเล็ต

สำหรับวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพในปริภูมิเวฟเล็ตนั้นได้ถูกพัฒนาขึ้นในช่วง 20 ปีที่ผ่านมา โดยกรรมวิธีส่วนมากจะอยู่ในรูปวิธีทางสถิติ (statistical method) ซึ่งแบ่งได้เป็น 2 ประเภทใหญ่ๆ คือ วิธีแบ่งขีดเริ่มเปลี่ยนเวฟเล็ต (wavelet thresholding) และวิธีความเสี่ยงแบบเบส์ (Bayes' risk) สำหรับวิธีหลังนี้จะได้กล่าวถึง หลักการความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตระหว่างสเกล (parent and child relation) ด้วย ซึ่งหลักการนี้ได้ถูกนำเสนอไว้ในงานวิจัยที่ [1] อันจะเป็นหลักการสำคัญที่จะใช้ในงานวิจัยนี้ต่อไป

2 การแบ่งขีดเริ่มเปลี่ยนเวฟเล็ต

วิธีนี้จัดเป็นวิธีเริ่มแรกสุดของวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพบนปริภูมิเวฟเล็ต และยังเป็นวิธีที่มีขั้นตอนไม่ซับซ้อนอีกด้วย โดยเป็นวิธีที่ศึกษาและออกแบบ ฟังก์ชันหดตัว (shrinkage function) ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่ใช้ในการลดสัญญาณรบกวน โดยทำการเปลี่ยนสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่มีสัญญาณรบกวน (noisy wavelet coefficient) ให้เป็นสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่ปราศจากสัญญาณรบกวน (noise-free wavelet coefficient) หรือทำการออกแบบขีดเริ่มเปลี่ยนหรือจุดเริ่มเปลี่ยน (thresholding) ที่จะใช้กับ shrinkage function นั้นเอง สำหรับ shrinkage function เริ่มแรกที่นิยมใช้ในการออกแบบ คือ ฟังก์ชัน soft และ hard-thresholding [2] ต่อจากนั้นได้มีการพัฒนาฟังก์ชันหดตัวขึ้นอีกอย่างต่อเนื่อง เพื่อเพิ่มประสิทธิภาพในการลดสัญญาณรบกวน เช่น ฟังก์ชัน firm-shrinkage [3] (ซึ่งเป็นฟังก์ชันหดตัวที่ต้องการขีดเริ่มเปลี่ยน 2 ตัวในการลดสัญญาณรบกวน จึงมีประสิทธิภาพมากกว่าฟังก์ชัน soft และ hard-thresholding ที่ต้องการขีดเริ่มเปลี่ยนตัวเดียว) โดยภาพที่ 1 แสดงถึงตัวอย่างของฟังก์ชันหดตัวชนิด soft และ hard-thresholding



ภาพที่ 1 จากซ้ายไปขวาแสดงฟังก์ชันหดตัว soft-thresholding และ hard-thresholding

สำหรับข้อเสียของ วิธีการแบ่งขีดเริ่มเปลี่ยนเวฟเล็ต คือ ยังมีความไม่ชัดเจนในการหาขีดเริ่มเปลี่ยน สำหรับใช้กับฟังก์ชันหาค่าอยู่ [4]

3 ความเสี่ยงแบบเบส์

สำหรับการลดสัญญาณรบกวนภาพด้วย วิธีความเสี่ยงแบบเบส์ นั้นจะอาศัยหลักการทางสถิติ คือ การประมาณแบบเบส์ (Bayesian estimation) ซึ่งวิธีนี้ส่วนใหญ่จะอยู่ในรูปของ วิธีภายหลังสูงสุด (maximum a posterior, MAP) หรือ วิธีค่าผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยน้อยสุด (minimum mean square error, MMSE) โดยในที่นี้จะกล่าวถึงเฉพาะรายละเอียดของการประยุกต์ใช้ วิธีภายหลังสูงสุด เท่านั้น ดังนี้

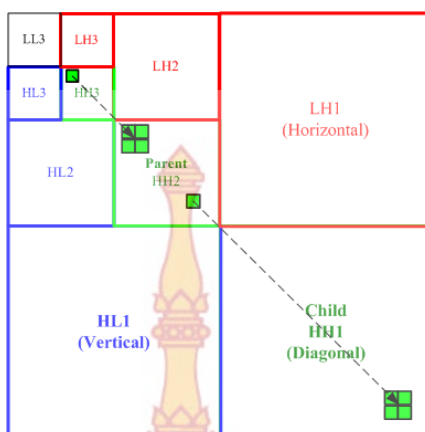
วิธีภายหลังสูงสุด

วิธีนี้จะประยุกต์ใช้ หลักการประมาณภายหลังสูงสุด ในการลดสัญญาณรบกวนภาพในปริภูมิ เวฟเล็ตซึ่งสมมุติให้สัมประสิทธิ์เวฟเล็ตปราศจากสัญญาณรบกวน (noise-free wavelet coefficient) มีการแจกแจงตัวแปรสุ่ม $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_d]^T$ ซึ่ง X_1 คือ ระดับการแปลงย่อย (subband) ที่จะพิจารณา และ d คือ จำนวนระดับความละเอียดของการแปลงเวฟเล็ตที่จะพิจารณา ยกตัวอย่างเช่น ถ้ากำหนดให้ $d = 2$ และจะพิจารณาระดับการแปลง HH1 เราจะพิจารณาสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตใน HH1 และ HH2 เท่านั้น และมีสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่สังเกตได้ (observed wavelet coefficient) หรือ สัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่มีสัญญาณรบกวน (noisy wavelet coefficient) มีเวกเตอร์สุ่ม คือ $\mathbf{Y} = [Y_1, Y_2, \dots, Y_d]^T$ และ สัญญาณรบกวนมีเวกเตอร์สุ่ม $\mathbf{N} = [N_1, N_2, \dots, N_d]^T$ ซึ่งมีฟังก์ชัน ความหนาแน่นความน่าจะเป็น (probability density function, PDF) คือ $f_{\mathbf{N}}(\mathbf{n})$ และให้ $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ คือ ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตปราศจากสัญญาณรบกวน \mathbf{X} เมื่อประยุกต์การประมาณแบบภายหลังสูงสุด จะได้วิธีประมาณสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตปราศจาก สัญญาณรบกวน $\hat{\mathbf{x}}$ เมื่อกำหนดให้ความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตและสัญญาณรบกวนเป็น แบบบวก (additive noise) คือ $\mathbf{Y} = \mathbf{X} + \mathbf{N}$ ดังนี้ [1]

$$\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \arg \max_{\mathbf{x}} [\ln f_{\mathbf{N}}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \ln f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})] \quad (1)$$

4 ความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตระหว่างสเกล

ในงานวิจัยที่ [1] ได้นำเสนอหลักการความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตระหว่างระดับการแปลงย่อย เพื่อประยุกต์ใช้กับวิธีความเสี่ยงแบบเบส์ในการลดสัญญาณรบกวนภาพ ซึ่งวิธีนี้ได้รับความนิยมอย่างมาก เพราะให้ประสิทธิภาพในการลดสัญญาณรบกวนภาพที่ดี และมีกรรมวิธีที่ไม่ยุ่งยาก ซับซ้อน ทำให้ใช้เวลาในประมวลผลไม่มากด้วย โดยวิธีนี้จัดเป็นหลักการที่สำคัญ ของการนำเสนอ



ภาพที่ 2 ลักษณะความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตระหว่างสเกล (parent and child relation)

วิธีลดสัญญาณรบกวนภาพในงานวิจัยนี้ สำหรับหลักการความสัมพันธ์ระหว่างสเกล (parent and child relation) คือ สัมประสิทธิ์เวฟเล็ตชนิดเดียวกัน เช่น แนวนอน (horizontal) แนวตั้ง (vertical) หรือ แนวทแยง (diagonal) ที่ระดับการแปลงย่อยความละเอียดน้อย (low resolution subband) จะมีความสัมพันธ์ในลักษณะ parent กับสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่ระดับการแปลงย่อยความละเอียดสูง (high resolution subband) ที่จะพิจารณา ซึ่งเรียกว่า child ในระดับถัดไป ดังตัวอย่างในภาพที่ 2 เมื่อต้องการพิจารณาระดับการแปลงย่อย HH1 โดยพิจารณาแค่ 2 ระดับความละเอียด จะเรียกสัมประสิทธิ์เวฟเล็ต HH1 ว่า child และมี parent คือ สัมประสิทธิ์เวฟเล็ตใน HH2

5 ฟังก์ชันหัดตัวชนิดหลายตัวแปร

ในงานวิจัยที่ [1] ได้นำเสนอวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพ ด้วยวิธีความเสี่ยงแบบเบส โดยใช้วิธีภายหลังสูงสุดร่วมกับหลักการความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตระหว่างสเกลในหัวข้อที่แล้ว ซึ่งวิธีนี้ต้องอาศัยเวกเตอร์สุ่ม (random vectors) ในการอธิบายการกระจายตัวของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตปราศจากสัญญาณรบกวน ทั้งในส่วนของ parent และ child ซึ่งในงานวิจัยที่ [1] ได้ศึกษาความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตระหว่างสเกล ในฐานะข้อมูลภาพ Corel และได้สมมติให้เวกเตอร์สุ่มของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตดังกล่าวอยู่ในรูป spherically contoured radial exponential random vectors โดยมีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วม (Multivariate PDF) ดังต่อไปนี้

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \frac{K}{\sigma^d} \exp\left(\frac{-\sqrt{d+1}\|\mathbf{x}\|}{\sigma}\right) \quad (2)$$

เมื่อ σ^2 คือ ความแปรปรวน และ $K = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma((d+1)/2)} \left(\frac{d+1}{4\pi}\right)^{d/2}$ และ $\Gamma(\cdot)$ คือ ฟังก์ชันแกมมา

(Gamma function)

โดยภาพที่ 3 แสดงฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วมของ radial exponential random vectors ในกรณี $d = 2$ ตัวแปร และเมื่อกำหนดให้สัญญาณรบกวนในแต่ละสเกลการแปลงเวฟเล็ท มีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วมแบบเกาส์ที่เป็นอิสระต่อกัน มีค่าเฉลี่ยเป็น $\mu = 0$ และความแปรปรวน σ_n^2 จะได้ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วมของสัญญาณรบกวนคือ

$$f_N(\mathbf{n}) = \frac{1}{(2\pi\sigma_n^2)^{d/2}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{n}\|^2}{2\sigma_n^2}\right) \quad (3)$$

หา \hat{x}_i จากการแก้สมการที่ 1 โดยใช้สมการที่ 2 และ สมการที่ 3

$$\ln f_N(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \ln f_X(\mathbf{x}) = \ln\left(\frac{1}{(2\pi\sigma_n^2)^{d/2}}\right) - \frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2}{2\sigma_n^2} + \ln\left(\frac{K}{\sigma^d}\right) - \frac{\sqrt{d+1}\|\mathbf{x}\|}{\sigma}$$

$$\frac{\partial [\ln f_N(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \ln f_X(\mathbf{x})]}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{y_i - x_i}{\sigma_n^2} - \frac{\sqrt{d+1}x_i}{\sigma\|\mathbf{x}\|} = 0$$

$$x_i = \frac{y_i}{\left(\frac{\sigma_n^2\sqrt{d+1}}{\sigma\|\mathbf{x}\|}\right) + 1}$$

กำหนดให้ $r = \|\mathbf{x}\|$

$$x_i = \frac{y_i}{\left(\frac{\sigma_n^2\sqrt{d+1}}{\sigma r}\right) + 1} \quad (4)$$

เมื่อคำนวณคือ $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2}$ ดังนั้น

$$\|\mathbf{x}\| = \frac{\|\mathbf{y}\|}{\left(\frac{\sigma_n^2\sqrt{d+1}}{\sigma r}\right) + 1}$$

$$\frac{\sigma_n^2\sqrt{d+1}}{\sigma r} + 1 = \frac{\|\mathbf{y}\|}{r} \quad (5)$$

หา r จากสมการที่ 5 ดังนั้น

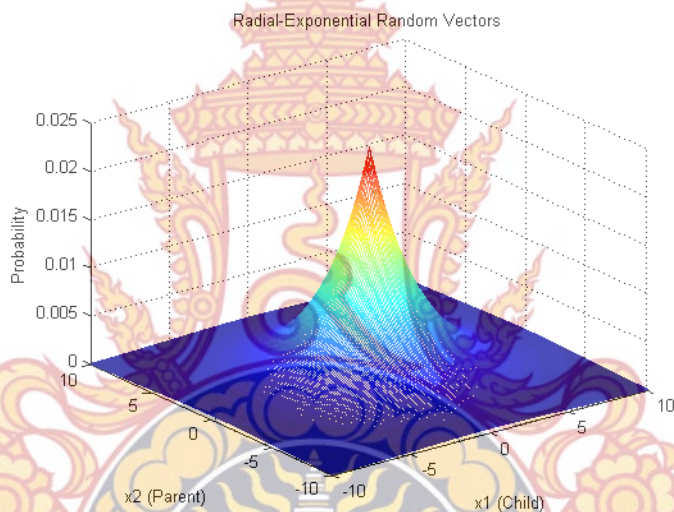
$$r = \|\mathbf{y}\| - \frac{\sigma_n^2\sqrt{d+1}}{\sigma}$$

นำสมการที่ 5 แทนในสมการที่ 4 กำหนด $i = 1$ จะได้ฟังก์ชันหดตัวชนิดหลายตัวแปร

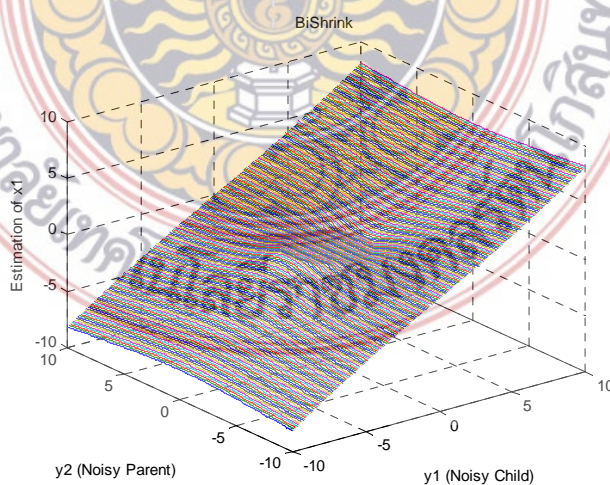
$$\hat{x}_1 = \frac{r_+}{\|\mathbf{y}\|} y_1 = \frac{\left(\|\mathbf{y}\| - \frac{\sigma_n^2 \sqrt{d+1}}{\sigma} \right)_+}{\|\mathbf{y}\|} y_1 \quad (6)$$

เมื่อ $g_+ = \max(0, g)$ ในงานวิจัยที่ [1] เรียกฟังก์ชันหดตัวชนิดหลายตัวแปรในสมการที่ 6 กรณี $d = 2$ -Dimension $\|\mathbf{y}\| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ ดังสมการที่ 7 ว่า Bishrink โดยมีรูปฟังก์ชันหดตัวดังภาพที่ 4

$$\hat{x}_1 = \frac{\left(\sqrt{y_1^2 + y_2^2} - \frac{\sqrt{3}\sigma_n^2}{\sigma} \right)_+}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} y_1 \quad (7)$$



ภาพที่ 3 ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วมของ radial exponential random vectors ในกรณี $d = 2$ ตัวแปร



ภาพที่ 4 ฟังก์ชันหดตัวชนิดหลายตัวแปร Bishrink กรณี $d = 2$ -Dimension

6 การประมาณพารามิเตอร์ทางสถิติสำหรับฟังก์ชันหดตัว

จากสมการที่ 7 จะเห็นได้ว่าถ้าเราต้องการใช้ฟังก์ชันหดตัว Bishrink ในการลดสัญญาณรบกวนนั้นเราจำเป็นที่จะต้องทราบถึงค่าของพารามิเตอร์ทางสถิติทั้ง 2 ชนิดนี้ก่อน คือ ความแปรปรวนของสัญญาณรบกวน (noise variance) σ_n^2 และ ความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่ปราศจากสัญญาณรบกวน (noise-free variance) σ^2 ซึ่งเมื่อกำหนดให้ความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตและสัญญาณรบกวนเป็นแบบบวกแล้ว เราสามารถประมาณค่าความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่ปราศจากสัญญาณรบกวนผ่านทาง ความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่มีสัญญาณรบกวน (noisy variance) σ_y^2 ได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\sigma^2 = (\sigma_y^2 - \sigma_n^2)_+$$

ดังนั้นปัญหาของการประมาณค่าพารามิเตอร์ทางสถิติจึงอยู่ในรูปของการประมาณค่า σ_n^2 และ σ_y^2 แทน ซึ่งจากงานวิจัยที่ [5] ได้นำเสนอสูตรในการประมาณความแปรปรวนของสัญญาณรบกวนในรูป

$$\hat{\sigma}_n^2 = (\text{median} |HH_1| / 0.6745)^2$$

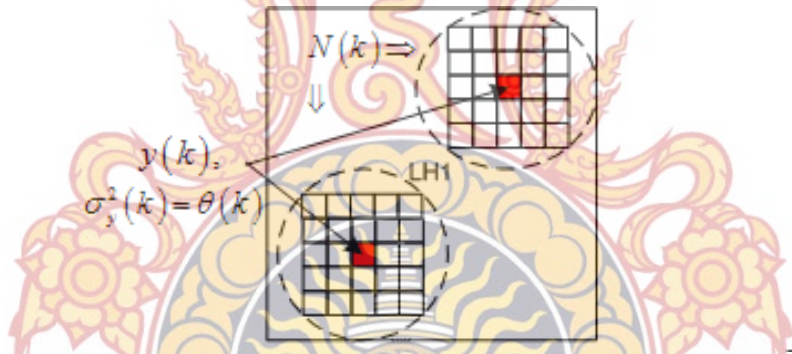
ส่วนความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่มีสัญญาณรบกวนนั้น งานวิจัยที่ [6] ได้นำเสนอวิธีประมาณที่เรียกว่า การประมาณความแปรปรวนท้องถิ่น (local variance estimation) โดยจะเป็นเนื้อหาที่จะนำเสนอหลักในงานวิจัยชิ้นนี้ ซึ่งจะได้กล่าวถึงรายละเอียดในบทถัดไป



บทที่ 3 วิธีการและขั้นตอนการดำเนินงาน

1. ความแปรปรวนท้องถิ่น

ในงานวิจัยที่ [6] ได้นำเสนอ วิธีประมาณความแปรปรวนท้องถิ่น (local variance estimation) ภายใต้เงื่อนไขที่ว่าสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่มีสัญญาณรบกวน (noisy wavelet coefficient) ใน subbandที่กำลังพิจารณาแต่ละตัว $y(k)$ เมื่อ $k = 1, 2, \dots, N$ โดย N คือจำนวนสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตในแต่ละ subband จะมีความแปรปรวน $\sigma_y^2(k)$ แต่ละค่าที่แตกต่างกัน ภายใต้กรอบหน้าต่างสี่เหลี่ยม (square window) $N(k)$ ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $y(k)$ โดยเราจะเรียกความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่มีสัญญาณรบกวนแต่ละค่า $\sigma_y^2(k)$ นี้ว่า ความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่มีสัญญาณรบกวนท้องถิ่น (local noisy variance) ซึ่งแสดงได้ดังภาพที่ 5 โดยในที่นี้จะใช้สัญลักษณ์ $\theta(k)$ แทนสัญลักษณ์ $\sigma_y^2(k)$ เพื่อให้สะดวกต่อการเขียนสัญลักษณ์



ภาพที่ 5 ความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่มีสัญญาณรบกวนท้องถิ่น

ซึ่งถ้าสมมติให้ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นเป็นก่อนหน้าของความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่มีสัญญาณรบกวนท้องถิ่น (local noisy variance prior PDF) $f_{\theta(k)}(\theta(k))$ มีอยู่จริง เราสามารถประยุกต์ใช้วิธีภายหลังสูงสุด ในการประมาณ $\theta(k)$ ได้ดังต่อไปนี้ [6]

$$\hat{\sigma}_y^2(k) = \hat{\theta}(k) = \arg \max_{\theta(k) \geq 0} \ln \left(\left(\prod_{j \in N(k)} f(y_j | \theta(k)) \right) f_{\theta(k)}(\theta(k)) \right) \quad (8)$$

เมื่อ $f(y_j | \theta(k)), j \in N(k)$ คือ ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่มีสัญญาณรบกวน (noisy wavelet coefficients PDF) ภายใต้พารามิเตอร์ $\theta(k)$

โดยเราสามารถหาความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่ปราศจากสัญญาณรบกวน (local noise-free variance) $\sigma^2(k)$ ได้ดังนี้ $\sigma^2(k) = (\theta(k) - \sigma_n^2)_+$

สำหรับในงานวิจัยฉบับนี้ จะนำเสนอวิธีคำนวณความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่มีสัญญาณรบกวนท้องถิ่น $\theta(k)$ ใน 2 กรณีคือ กรณีที่สมมุติให้ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่มีสัญญาณรบกวนมีการกระจายตัวแบบลาปลาซ (Laplacian distribution) และ การกระจายตัวแบบเกาส์ (Gaussian distribution) ตามลำดับ โดยสมมุติให้ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นก่อนหน้าของความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่มีสัญญาณรบกวนท้องถิ่น เป็นการกระจายตัวแบบพาราโต (Pareto distribution) ดังนี้

2 กรณี ลาปลาซ-พาราโต

กรณีนี้จะสมมุติให้สัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่มีสัญญาณรบกวน มี PDF แบบลาปลาซที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และความแปรปรวน $\theta_1(k)$ คือ $f(y_j | \theta_1(k)) = \frac{1}{\sqrt{2\theta_1(k)}} \exp\left[-\sqrt{\frac{2}{\theta_1(k)}} |y_j|\right]$ ส่วนฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นก่อนหน้า คือ การกระจายตัวแบบพาราโต $f_{\theta_1(k)}(\theta_1(k)) = \frac{l(\theta_m)^l}{(\theta_1(k))^{l+1}}$ ซึ่งมีพารามิเตอร์ คือ $\theta_m, l > 0$ ดังนี้

$$\left(\prod_{j \in N(k)} f(y_j | \theta_1(k)) \right) f_{\theta_1(k)}(\theta_1(k)) = \left[\frac{1}{\sqrt{2\theta_1(k)}} \right]^M \exp\left[\sqrt{\frac{2}{\theta_1(k)}} \sum_{j \in N(k)} |y_j| \right] \frac{l(\theta_m)^l}{(\theta_1(k))^{l+1}}$$

$$\ln \left[\left(\prod_{j \in N(k)} f(y_j | \theta_1(k)) \right) f_{\theta_1(k)}(\theta_1(k)) \right] = \frac{M}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{M}{2} \ln(\theta_1(k)) - \sqrt{\frac{2}{\theta_1(k)}} \sum_{j \in N(k)} |y_j| + \ln(l(\theta_m)^l) - (l+1) \ln(\theta_1(k))$$

เมื่อ M คือ จำนวนสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตในหน้าต่าง $N(k)$

หาค่า $\theta_1(k)$ จากสมการที่ 8 โดย

$$\frac{\partial \ln \left[\left(\prod_{j \in N(k)} f(y_j | \theta_1(k)) \right) f_{\theta_1(k)}(\theta_1(k)) \right]}{\partial (\theta_1(k))} = 0$$

$$\frac{M}{-2\theta_1(k)} + \frac{1}{\sqrt{2}(\theta_1(k))^{3/2}} \sum_{j \in N(k)} |y_j| - \frac{l+1}{\theta_1(k)} = 0$$

ดังนั้น

$$\hat{\theta}_1(k) = \left[\frac{\sum_{j \in N(k)} |y_j|}{\sqrt{2} \left(\frac{M}{2} + l + 1 \right)} \right]^2 \quad (9)$$

ทำการหาค่าพารามิเตอร์ $\theta_m, l > 0$ จากงานวิจัยที่ [7]

เมื่อกำหนดให้ $\hat{\theta}_{1,ML}(k) = \left[\sqrt{2} \sum_{j \in N(k)} |y_j| / M \right]^2$ แล้ว $\hat{\theta}_m = \max\left(\min_k [\hat{\theta}_{1,ML}(k)], \epsilon\right)$ และ $\hat{l} = \frac{N}{\sum_{k=1}^N (\ln(\hat{\theta}_{1,ML}(k)) - \ln(\hat{\theta}_m))}$ โดย ϵ คือ จำนวนที่มีค่ามากกว่า 0 ที่มีค่าน้อยๆ ซึ่งเราจะเรียกวิธีนี้ว่า Laplacian-Pareto

3 กรณี เกาส์-พาราเรโต

กรณีนี้จะสมมติให้สัมประสิทธิ์เวฟเลตที่มีสัญญาณรบกวนมี PDF แบบเกาส์ที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และความแปรปรวน $\theta_2(k)$ คือ $f(y_j | \theta_2(k)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2(k)}} \exp\left(\frac{-y_j^2}{2\theta_2(k)}\right)$ ส่วนฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นก่อนหน้า คือ การกระจายตัวแบบพาราเรโต $f_{\theta_2(k)}(\theta_2(k)) = \frac{l(\theta_m)^l}{(\theta_2(k))^{l+1}}$ ซึ่งมีพารามิเตอร์ คือ $\theta_m, l > 0$ ดังนั้น

$$\left(\prod_{j \in N(k)} f(y_j | \theta_2(k)) \right) f_{\theta_2(k)}(\theta_2(k)) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2(k)}} \right)^M \exp\left(\frac{-1}{2\theta_2(k)} \sum_{j \in N(k)} y_j^2\right) \frac{l(\theta_m)^l}{(\theta_2(k))^{l+1}}$$

$$\ln \left[\left(\prod_{j \in N(k)} f(y_j | \theta_2(k)) \right) f_{\theta_2(k)}(\theta_2(k)) \right] = \frac{M}{2} \ln\left(\frac{1}{2\pi}\right) - \frac{M}{2} \ln(\theta_2(k)) - \frac{\sum_{j \in N(k)} y_j^2}{2\theta_2(k)} + \ln(l(\theta_m)^l) - (l+1) \ln(\theta_2(k))$$

หาค่า $\theta_2(k)$ จากสมการที่ 8 โดย

$$\frac{\partial \ln \left[\left(\prod_{j \in N(k)} f(y_j | \theta_2(k)) \right) f_{\theta_2(k)}(\theta_2(k)) \right]}{\partial(\theta_2(k))} = 0$$

$$\frac{-M}{2\theta_2(k)} + \frac{1}{2(\theta_2(k))^2} \sum_{j \in N(k)} y_j^2 - \frac{l+1}{\theta_2(k)} = 0$$

ดังนั้น

$$\hat{\theta}_2(k) = \frac{\sum_{j \in N(k)} y_j^2}{\left(\frac{M}{2} + l + 1\right)} \quad (10)$$

ทำการหาค่าพารามิเตอร์ $\theta_m, l > 0$ จากงานวิจัยที่ [7]

เมื่อกำหนดให้ $\hat{\theta}_{2,ML}(k) = \sum_{j \in N(k)} y_j^2 / M$ แล้ว $\hat{\theta}_m = \max\left(\min_k [\hat{\theta}_{2,ML}(k)], \epsilon\right)$ และ $\hat{l} =$

$$\frac{N}{\sum_{k=1}^N (\ln(\hat{\theta}_{2,ML}(k)) - \ln(\hat{\theta}_m))} \quad \text{ซึ่งเราจะเรียกวิธีนี้ว่า Gaussian-Pareto}$$



บทที่ 4

ผลการทดลอง

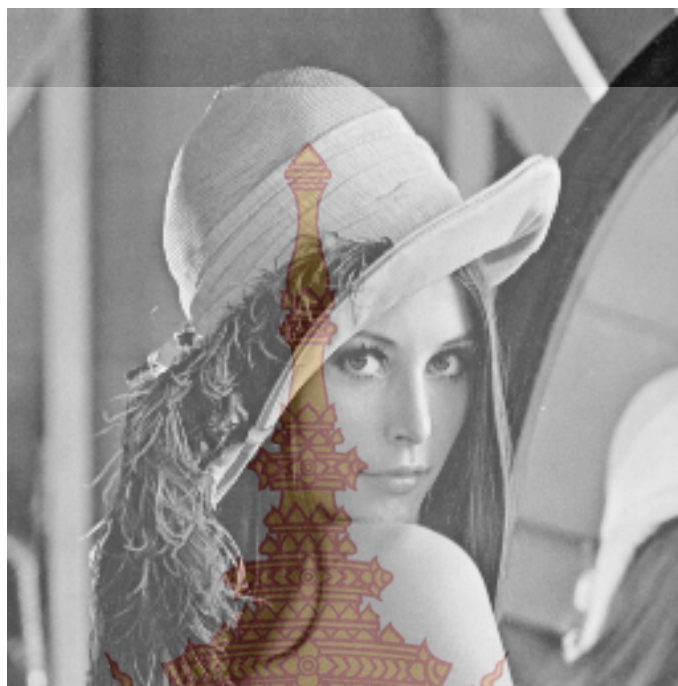
ในงานวิจัยนี้จะทดสอบประสิทธิภาพ ของวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพที่นำเสนอ คือ วิธี Laplacian-Pareto และ วิธี Gaussian-Pareto กับ วิธีมาตรฐานที่มีการนำเสนอไว้ในอดีต คือ วิธี LAWMAP ซึ่งนำเสนอไว้ในงานวิจัยที่ [6] และ วิธี MLAP-MMSE ที่นำเสนอไว้ในงานวิจัยที่ [8] โดยใช้ การแปลงเวฟเล็ต ชนิด DT-CWT (dual-tree complex wavelet transform) ซึ่งเป็นการแปลงเวฟ เล็ตที่มีคุณสมบัติ redundant ซึ่งจากงานวิจัยที่ [9] พบว่าจะให้ประสิทธิภาพในการลดสัญญาณ รบกวนที่ดีกว่าการใช้ วิธีการแปลงเวฟเล็ตแบบ DWT (discrete wavelet transform) ทั่วไป โดยใช้ ขนาดหน้าต่างเพื่อคำนวณความแปรปรวนท้องถิ่น $N(k)$ ขนาด 7×7 ซึ่งเป็นขนาดมาตรฐานที่ใช้ใน งานวิจัยที่ [9] และจะทดสอบกับส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (standard deviation, SD) ของสัญญาณ รบกวนที่ $\sigma_n = 5, 10$ และ 15 โดยภาพที่นำมาทดสอบ คือ ภาพขนาด 512×512 จุดภาพ (pixel) มาตรฐาน Lena และ ภาพถ่ายรังสีเอ็กซ์ จำนวน 2 ภาพ ซึ่งจะเรียกว่า ภาพ X-ray 1 และ X-ray 2 ซึ่งเป็นภาพขนาด 512×512 จุดภาพ เช่นกัน และใช้ตัววัดประสิทธิภาพ คือ ค่าสัญญาณยอด (peak signal to noise ratio, PSNR) โดยค่า PSNR ที่ได้จะเกิดจากการทดสอบและหาค่าเฉลี่ยแบบสุ่ม จำนวน 5 ครั้ง

1. ผลการทดสอบภาพ Lena

ตารางที่ 1 แสดงค่า PSNR ของผลการทดสอบประสิทธิภาพของวิธีลดสัญญาณรบกวนชนิด ต่างๆกับภาพ Lena และ ภาพที่ 6 แสดงภาพ Lena ภาพที่ 7 แสดงภาพ Lena ที่มีสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 10$ ภาพที่ 8 แสดงวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบ LAWMAP ภาพที่ 9 แสดงวิธีลดสัญญาณรบกวน แบบ MLAP-MMSE ภาพที่ 10 แสดงวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบ Laplacian-Pareto และ ภาพที่ 11 แสดงวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบ Gaussian-Pareto

ตารางที่ 1 ค่า PSNR ผลการทดสอบประสิทธิภาพวิธีลดสัญญาณรบกวนชนิดต่างๆกับภาพ Lena

SD (σ_n)	5	10	15
LAWMAP [6]	37.91	35.17	33.41
MLAP-MMSE [8]	37.83	35.27	33.27
Laplacian-Pareto	37.94	35.35	33.66
Gaussian-Pareto	38.33	35.17	33.26



ภาพที่ 6 ภาพ Lena ขนาด 512X512 จุดภาพ



ภาพที่ 7 ภาพ Lena ที่มีสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 10$



ภาพที่ 8 แสดงวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบ LAWMAP [6] (PSNR=35.17)



ภาพที่ 9 แสดงวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบ MLAP-MMSE [8] (PSNR=35.27)



ภาพที่ 10 แสดงวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบ Laplacian-Pareto (PSNR=35.35)



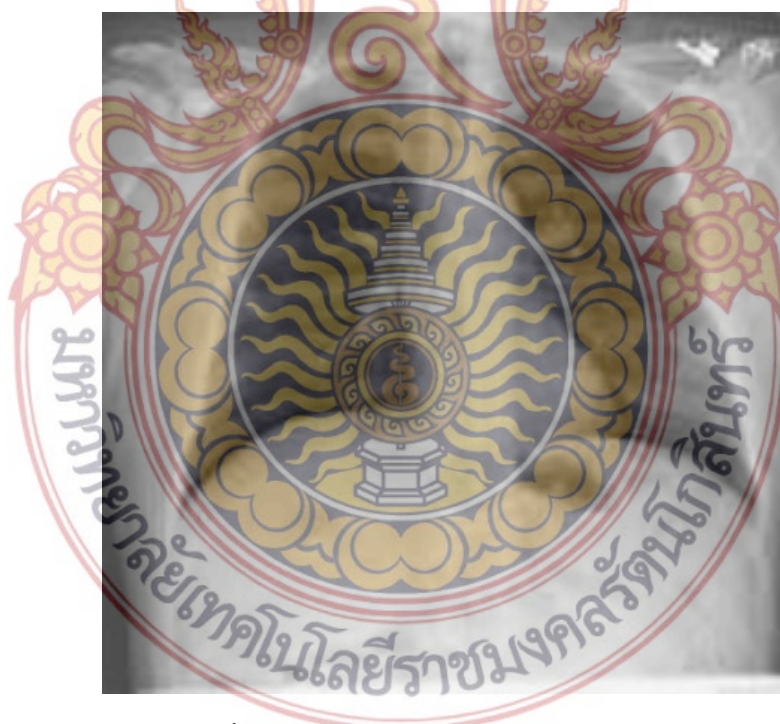
ภาพที่ 11 แสดงวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบ Gaussian-Pareto (PSNR=35.17)

2. ผลการทดสอบภาพ X-ray1

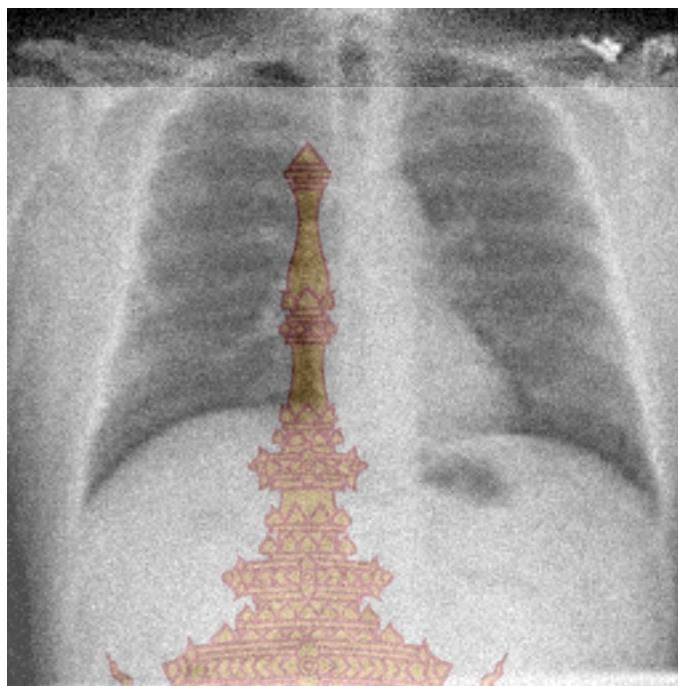
ตารางที่ 2 แสดงค่า PSNR ของผลการทดสอบประสิทธิภาพของวิธีลดสัญญาณรบกวนชนิดต่างๆกับภาพ X-ray1 และ ภาพที่ 12 แสดงภาพ X-ray1 ภาพที่ 13 แสดงภาพ X-ray1 ที่มีสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 15$ ภาพที่ 14 แสดงวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบ LAWMAP ภาพที่ 15 แสดงวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบ MLAP-MMSE ภาพที่ 16 แสดงวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบ Laplacian-Pareto และ ภาพที่ 17 แสดงวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบ Gaussian-Pareto

ตารางที่ 2 ค่า PSNR ผลการทดสอบประสิทธิภาพวิธีลดสัญญาณรบกวนชนิดต่างๆกับภาพ X-ray1

SD (σ_n)	5	10	15
LAWMAP [6]	45.49	41.16	38.51
MLAP-MMSE [8]	45.92	41.77	39.43
Laplacian-Pareto	45.77	41.47	39.44
Gaussian-Pareto	44.01	40.00	37.00



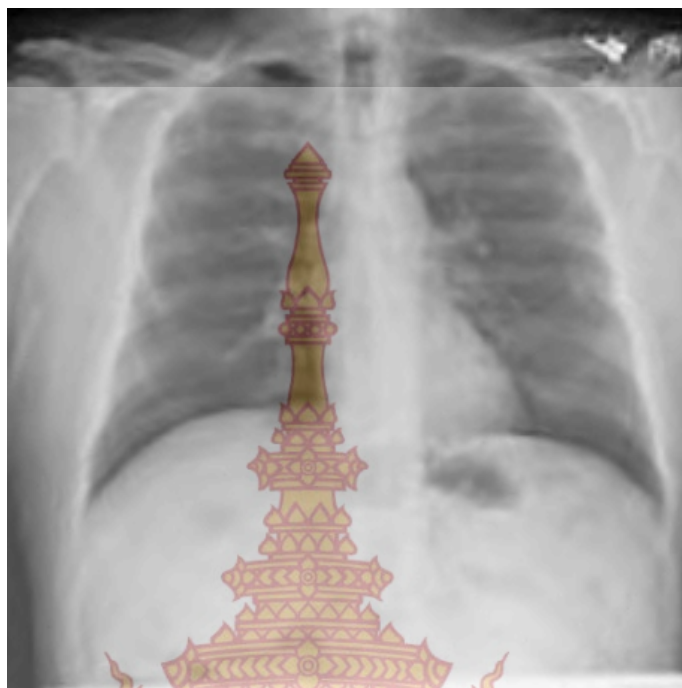
ภาพที่ 12 ภาพ X-ray1 ขนาด 512X512 จุดภาพ



ภาพที่ 13 ภาพ X-ray1 ที่มีสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 15$



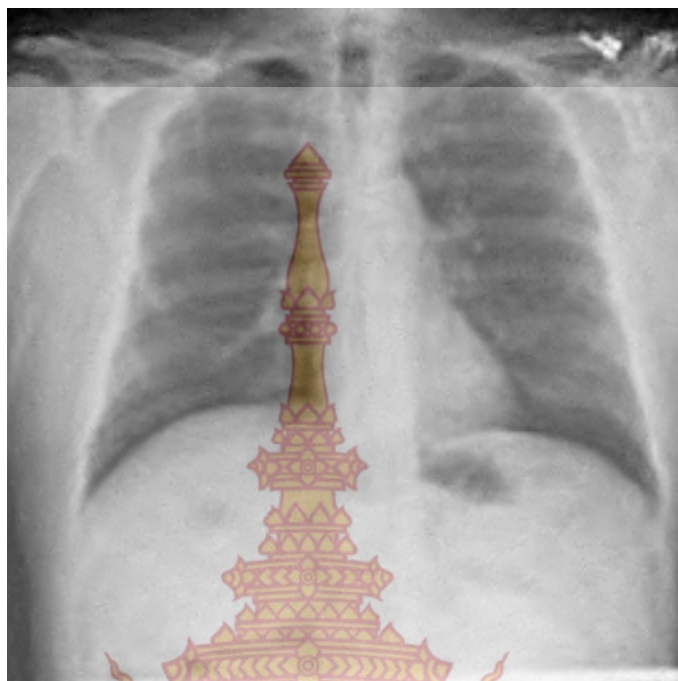
ภาพที่ 14 แสดงวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบ LAWMAP [6] (PSNR=38.51)



ภาพที่ 15 แสดงวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบ MLAP-MMSE [8] (PSNR=39.43)



ภาพที่ 16 แสดงวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบ Laplacian-Pareto (PSNR=39.44)



ภาพที่ 17 แสดงวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบ Gaussian-Pareto (PSNR=37.00)

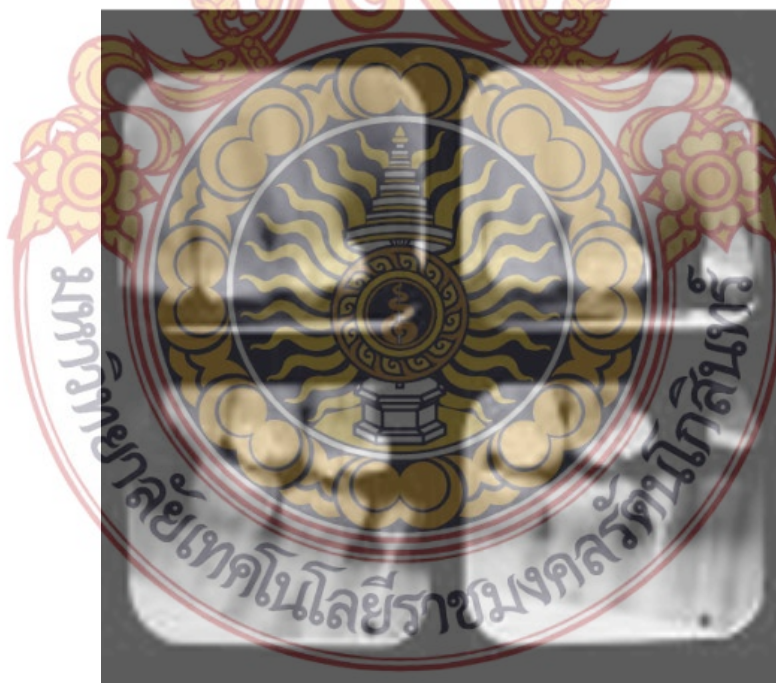


3. ผลการทดสอบภาพ X-ray2

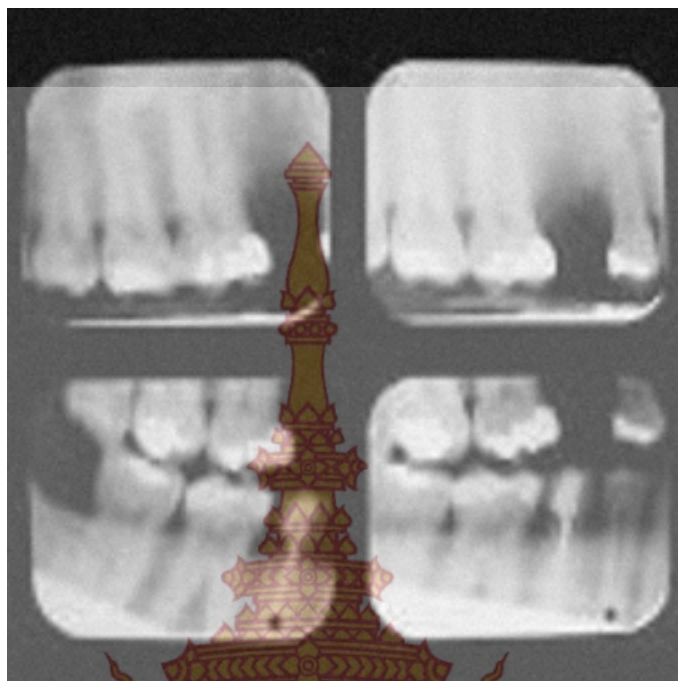
ตารางที่ 3 แสดงค่า PSNR ของผลการทดสอบประสิทธิภาพของวิธีลดสัญญาณรบกวนชนิดต่างๆกับภาพ X-ray2 และ ภาพที่ 18 แสดงภาพ X-ray2 ภาพที่ 19 แสดงภาพ X-ray2 ที่มีสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 5$ ภาพที่ 20 แสดงวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบ LAWMAP ภาพที่ 21 แสดงวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบ MLAP-MMSE ภาพที่ 22 แสดงวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบ Laplacian-Pareto และ ภาพที่ 23 แสดงวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบ Gaussian-Pareto

ตารางที่ 3 ค่า PSNR ผลการทดสอบประสิทธิภาพวิธีลดสัญญาณรบกวนชนิดต่างๆกับภาพ X-ray2

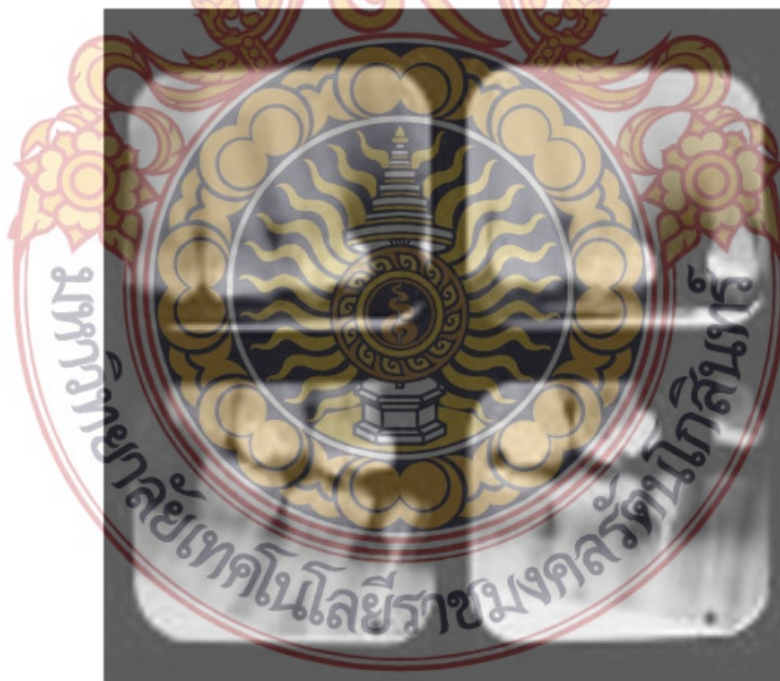
SD (σ_n)	5	10	15
LAWMAP [6]	44.88	39.90	37.18
MLAP-MMSE [8]	44.94	40.50	37.98
Laplacian-Pareto	45.00	40.52	38.00
Gaussian-Pareto	43.00	38.90	36.00



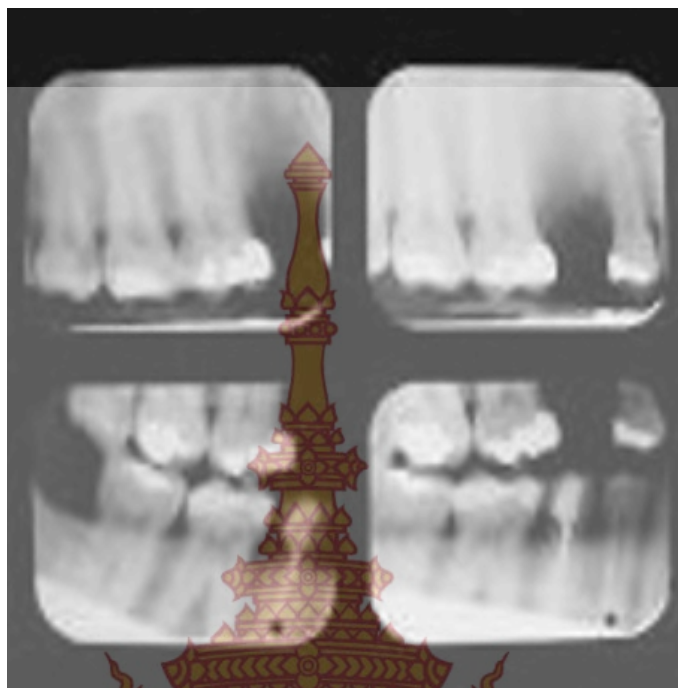
ภาพที่ 18 ภาพ X-ray2 ขนาด 512X512 จุดภาพ



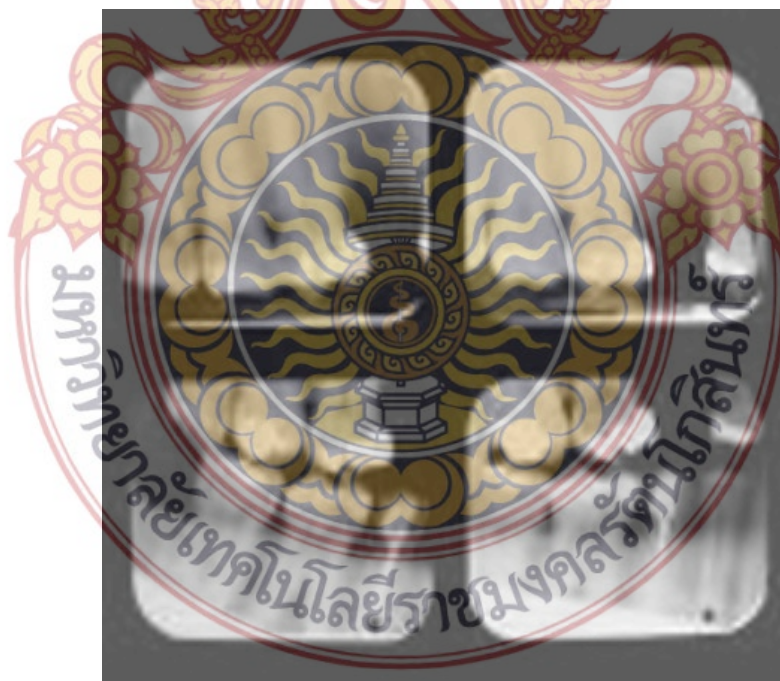
ภาพที่ 19 ภาพ X-ray2 ที่มีสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 5$



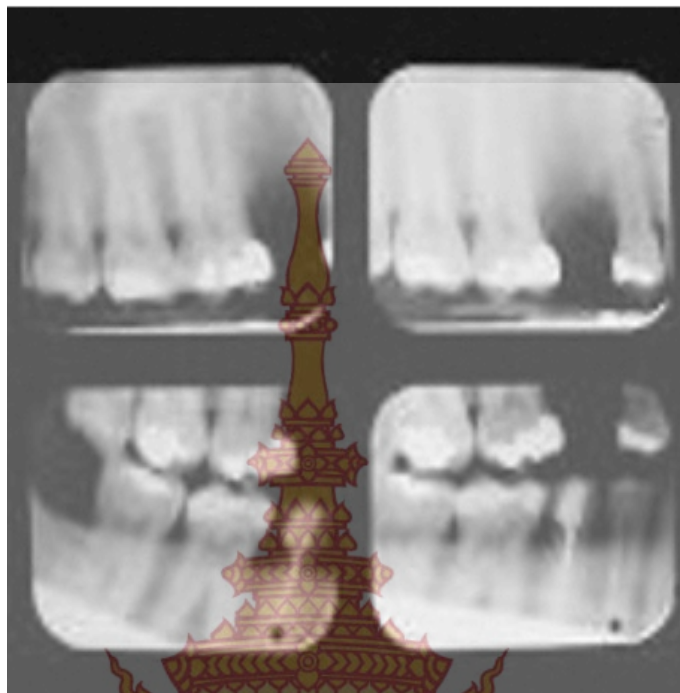
ภาพที่ 20 แสดงวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบ LAWMAP [6] (PSNR=44.88)



ภาพที่ 21 แสดงวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบ MLAP-MMSE [8] (PSNR=44.94)



ภาพที่ 22 แสดงวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบ Laplacian-Pareto (PSNR=45.00)



ภาพที่ 23 แสดงวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบ Gaussian-Pareto (PSNR=43.00)



บทที่ 5

สรุปผลการวิจัย

1. สรุปผลการวิจัย

งานวิจัยฉบับนี้ได้นำเสนอเทคนิคการลดสัญญาณรบกวนภาพถ่ายรังสีเอ็กซ์ ผ่านกระบวนการแปลงเวฟเล็ต โดยใช้ฟังก์ชันหาค่าตัวคูณหลายตัวแปรและได้นำเสนอกระบวนการประมาณพารามิเตอร์ทางสถิติ (ความแปรปรวนท้องถิ่น) ขึ้นมาใหม่ 2 วิธี คือ Laplacian-Pareto และ Gaussian-Pareto เพื่อใช้กับฟังก์ชันหาค่าตัวคูณหลายตัวแปรที่มี ซึ่งผลการทดลองกับภาพมาตรฐานและตัวอย่างภาพถ่ายรังสีเอ็กซ์พบว่าให้ผลการทดสอบเป็นที่น่าพอใจ กล่าวคือ ให้ประสิทธิภาพที่เทียบเท่าหรือดีกว่าวิธีการดั้งเดิมที่ได้มีการนำเสนอไว้

2. อภิปรายผลการวิจัย

เป็นที่น่าสังเกตว่าในการทดสอบบางกรณี คือ ที่ระดับสัญญาณรบกวนสูงๆ เช่น ที่ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของสัญญาณรบกวน $\sigma_n > 10$ จะพบว่าวิธีที่นำเสนอมีประสิทธิภาพที่เท่ากับหรืออาจจะดีกว่าวิธีการดั้งเดิมที่มีอยู่แล้ว ซึ่งนั่นเป็นจุดที่จะต้องหาทางปรับปรุงประสิทธิภาพวิธีการที่นำเสนอให้มีประสิทธิภาพดียิ่งขึ้นต่อไปในอนาคต

3. ข้อเสนอแนะ

สำหรับวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพด้วยการแปลงเวฟเล็ตโดยใช้ฟังก์ชันหาค่าตัวคูณหลายตัวแปรนี้ จากงานวิจัยในอดีตจะพบว่ามีผู้นำเสนอฟังก์ชันหาค่าตัวคูณหลายรูปแบบด้วยกัน ดังนั้น ถ้าประยุกต์ใช้วิธีประมาณพารามิเตอร์ทางสถิติที่นำเสนอในงานวิจัยนี้กับฟังก์ชันหาค่าตัวคูณอื่นๆนอกจาก Bishrink ที่ได้นำเสนอไปแล้วนั้น ก็อาจจะทำให้ประสิทธิภาพการลดสัญญาณรบกวนดีขึ้นก็เป็นได้ นอกจากนี้แทนที่จะใช้การกระจายตัวก่อนหน้าแบบพาราโตดังที่ได้นำเสนอไปแล้วนั้น เราอาจใช้การกระจายตัวแกมมา (Gamma distribution) หรือ การกระจายตัวไคสแควร์ (Chi-Square distribution) แทนก็ได้ ดังนั้นหัวข้อเหล่านี้จึงเป็นเรื่องที่น่าศึกษาค้นคว้าต่อไปในอนาคต

บรรณานุกรม

1. Sendur, L., and Selesnick, I. W. "Bivariate shrinkage functions for wavelet-based denoising exploiting interscale dependency." *IEEE Trans. Signal Processing*. 11 (November 2002): 2744-2756.
2. Donoho, D. L. "Denoising by soft-thresholding." *IEEE Trans. Info. Theory*. 3 (Mar 1995): 613-627.
3. Gao, H. Y. "Wavelet shrinkage denoising using the non-negative Garrote." *J. Computation Graph Stat*. 4 (1998): 469-488.
4. Rahman, S. M. M., Ahmad, M. O., and Swamy, M. N. S. "Bayesian wavelet-based image denoising using the Gauss-Hermite expansion." *IEEE Trans. Image Processing*. 10 (October 2008): 1755-1771.
5. Donoho, D. L., and Johnstone, I. M. "Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage." *Biometrika*. 3 (1994): 425-455.
6. Mihcak, M. K., Kozintsev, I., Ramchandran, K., and Moulin, P. "Low-complexity image denoising based on statistical modeling of wavelet coefficients." *IEEE Signal Processing Letters*. 12 (December, 1999): 300 -303.
7. Arnold, C. B. **Pareto distribution**. International co-operative publishing house, 1983.
8. Selesnick, I. W. "The estimation of Laplace random vectors in additive white Gaussian noise." *IEEE Trans. Signal Processing*. 8 (August 2008): 3482-3496.
9. Sendur, L., and Selesnick, I. W. "Bivariate shrinkage with local variance estimation." *IEEE Signal Processing Letters*. 12 (December 2002): 438-441.



ภาคผนวก ก
การประมาณแบบเบส์

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

ในรายงานฉบับนี้เราประยุกต์ใช้หลักการประมาณแบบเบสในการหาตัวแปรหรือพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า โดยสามารถสรุปลักษณะของปัญหาได้ดังนี้ เมื่อกำหนดให้ $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_d]^T$ เป็นตัวแปรหรือพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า และ $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_d]^T$ เป็นตัวแปรหรือพารามิเตอร์ที่สังเกตได้ (ทราบค่า) ในกรณีที่เรากำลังต้องการหาฟังก์ชัน $\mathbf{d}(\mathbf{b}) = [d_1(\mathbf{b}), d_2(\mathbf{b}), \dots, d_d(\mathbf{b})]^T$ เพื่อใช้ในการทำนาย \mathbf{a} ให้แม่นยำที่สุด

เมื่อประยุกต์ใช้การประมาณแบบเบสในการหาฟังก์ชัน $\mathbf{d}(\mathbf{b})$ เราจะพิจารณาให้ \mathbf{a} และ \mathbf{b} เป็นค่าของเวกเตอร์สุ่ม $\mathbf{A} = [A_1, A_2, \dots, A_d]^T$ และ $\mathbf{B} = [B_1, B_2, \dots, B_d]^T$ ตามลำดับ ซึ่งมีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นชนิดหลายตัวแปร (Multivariate Probability Density Function, Multivariate PDF) คือ $f_{\mathbf{A}}(\mathbf{a})$ และ $f_{\mathbf{B}}(\mathbf{b})$ จากนั้นจึงเลือกฟังก์ชัน $\mathbf{d}(\mathbf{b})$ ที่ทำให้ค่าเฉลี่ยการสูญเสียอย่างมีเงื่อนไข (Condition Expected Loss) $R(\mathbf{d})$ ที่นิยามดังต่อไปนี้ให้มีค่าต่ำสุด

$$R(\mathbf{d}) = \int \int \dots \int L(\mathbf{a}, \mathbf{d}(\mathbf{b})) f_{\mathbf{A}|\mathbf{B}}(\mathbf{a} | \mathbf{b}) |da_1 da_2 \dots da_d|$$

เมื่อ $L(\mathbf{a}, \mathbf{d}(\mathbf{b}))$ คือ ฟังก์ชันการสูญเสีย (Loss Function)

$f_{\mathbf{A}|\mathbf{B}}(\mathbf{a} | \mathbf{b})$ คือ ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นอย่างมีเงื่อนไข (Conditional Probability Density Function, Conditional PDF) $\mathbf{A} = \mathbf{a}$ ต่อเมื่อ $\mathbf{B} = \mathbf{b}$

ดังนั้น ฟังก์ชัน $d_i(\mathbf{b})$ เมื่อ $i = 1, 2, \dots, d$ ที่ทำให้ค่าเฉลี่ยการสูญเสียอย่างมีเงื่อนไขต่ำที่สุด คือ การแก้ระบบสมการต่อไปนี้

$$d_1(\mathbf{b}) = \arg \min_{d_1} [R(\mathbf{d})]$$

$$d_2(\mathbf{b}) = \arg \min_{d_2} [R(\mathbf{d})]$$

⋮

$$d_d(\mathbf{b}) = \arg \min_{d_d} [R(\mathbf{d})]$$

การประมาณแบบภายหลังสูงสุด (Maximum a Posterior, MAP)

วิธีนี้จะนิยามฟังก์ชันการสูญเสียอยู่ในรูป $L_{0/1}(\mathbf{a}, \mathbf{d}(\mathbf{b}))$ ซึ่งมีนิยามดังต่อไปนี้

$$L_{0/1}(\mathbf{a}, \mathbf{d}(\mathbf{b})) = \begin{cases} 0, & a_1 = d_1(\mathbf{b}), a_2 = d_2(\mathbf{b}), \dots, a_d = d_d(\mathbf{b}) \\ 1, & a_1 \neq d_1(\mathbf{b}), a_2 \neq d_2(\mathbf{b}), \dots, a_d \neq d_d(\mathbf{b}) \end{cases}$$

คำนวณค่าเฉลี่ยการสูญเสียอย่างมีเงื่อนไข (Condition Expected Loss)

$$R(\mathbf{d}) = \int_{d_1(\mathbf{b})}^{a_1(\mathbf{b})} \int_{d_2(\mathbf{b})}^{a_2(\mathbf{b})} \dots \int_{d_d(\mathbf{b})}^{a_d(\mathbf{b})} f_{A|B}(\mathbf{a} | \mathbf{b}) |da_1 da_2 \dots da_d|$$

$$= 1 - f_{A|B}((a_1 = d_1(\mathbf{b}), a_2 = d_2(\mathbf{b}), \dots, a_d = d_d(\mathbf{b})) | \mathbf{b})$$

ดังนั้นฟังก์ชัน $d_i(\mathbf{b})$ ที่ทำให้ $R(\mathbf{d})$ ต่ำที่สุด คือ การแก้ระบบสมการ ต่อไปนี้

$$d_1(\mathbf{b}) = \arg \max_{a_1} [f_{A|B}(\mathbf{a} | \mathbf{b})]$$

$$d_2(\mathbf{b}) = \arg \max_{a_2} [f_{A|B}(\mathbf{a} | \mathbf{b})]$$

$$\vdots$$

$$d_d(\mathbf{b}) = \arg \max_{a_d} [f_{A|B}(\mathbf{a} | \mathbf{b})]$$

หรือเขียนในรูป

$$\mathbf{d}(\mathbf{b}) = \arg \max_{\mathbf{a}} [f_{A|B}(\mathbf{a} | \mathbf{b})]$$

จากกฎของเบส์ (Bayes' Rule)

$$f_{A|B}(\mathbf{a} | \mathbf{b}) = \frac{f_{B|A}(\mathbf{b} | \mathbf{a}) f_A(\mathbf{a})}{f_B(\mathbf{b})}$$

เมื่อ $f_{B|A}(\mathbf{b} | \mathbf{a})$ คือ ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นมีเงื่อนไข $\mathbf{B} = \mathbf{b}$ เมื่อ $\mathbf{A} = \mathbf{a}$ ดังนั้น

$$\mathbf{d}(\mathbf{b}) = \arg \max_{\mathbf{a}} [f_{B|A}(\mathbf{b} | \mathbf{a}) f_A(\mathbf{a})]$$

ซึ่งสมการนี้ คือ สมการที่ใช้ประมาณตัวแปรหรือพารามิเตอร์แบบภายหลังสูงสุด

การประมาณแบบผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยน้อยสุด (Minimum Mean Square Error, MMSE)

วิธีนี้จะนิยามฟังก์ชันการสูญเสียอยู่ในรูปของ $L_2(\mathbf{a}, \mathbf{d}(\mathbf{b}))$ ซึ่งมีนิยามดังต่อไปนี้

$$L_2(\mathbf{a}, \mathbf{d}(\mathbf{b})) = (a_1 - d_1(\mathbf{b}))^2 + (a_2 - d_2(\mathbf{b}))^2 + \dots + (a_d - d_d(\mathbf{b}))^2$$

ทำการคำนวณค่าเฉลี่ยการสูญเสียอย่างมีเงื่อนไข

$$R(\mathbf{d}) = \int \int \dots \int \left((a_1 - d_1(\mathbf{b}))^2 + (a_2 - d_2(\mathbf{b}))^2 + \dots + (a_d - d_d(\mathbf{b}))^2 \right)$$

$$\times f_{A|B}(\mathbf{a} | \mathbf{b}) |da_1 da_2 \dots da_d|$$

หาฟังก์ชัน $d_i(\mathbf{b})$ ที่ทำให้ $R(\mathbf{d})$ ต่ำที่สุด

$$\frac{\partial R(\mathbf{d})}{\partial d_i} =$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial d_i} \int \int \dots \int \left((a_1 - d_1(\mathbf{b}))^2 + (a_2 - d_2(\mathbf{b}))^2 + \dots + (a_d - d_d(\mathbf{b}))^2 \right) f_{\mathbf{A}|\mathbf{B}}(\mathbf{a} | \mathbf{b}) |da_1 da_2 \dots da_d| \\ &= \int \int \dots \int \frac{\partial}{\partial d_i} \left((a_1 - d_1(\mathbf{b}))^2 + (a_2 - d_2(\mathbf{b}))^2 + \dots + (a_d - d_d(\mathbf{b}))^2 \right) f_{\mathbf{A}|\mathbf{B}}(\mathbf{a} | \mathbf{b}) |da_1 da_2 \dots da_d| \\ &= -2 \int \int \dots \int (a_i - d_i(\mathbf{b})) f_{\mathbf{A}|\mathbf{B}}(\mathbf{a} | \mathbf{b}) |da_1 da_2 \dots da_d| \end{aligned}$$

กำหนดให้

$$\begin{aligned} & \frac{\partial R(\mathbf{d})}{\partial d_i} = 0 \\ & -2 \int \int \dots \int (a_i - d_i(\mathbf{b})) f_{\mathbf{A}|\mathbf{B}}(\mathbf{a} | \mathbf{b}) |da_1 da_2 \dots da_d| = 0 \\ & d_i(\mathbf{b}) = \frac{\int \int \dots \int a_i f_{\mathbf{A}|\mathbf{B}}(\mathbf{a} | \mathbf{b}) |da_1 da_2 \dots da_d|}{\int \int \dots \int f_{\mathbf{A}|\mathbf{B}}(\mathbf{a} | \mathbf{b}) |da_1 da_2 \dots da_d|} \end{aligned}$$

โดย $\int \int \dots \int f_{\mathbf{A}|\mathbf{B}}(\mathbf{a} | \mathbf{b}) |da_1 da_2 \dots da_d| = 1$ และ จากกฎของเบส์ ดังนั้น

$$d_i(\mathbf{b}) = \frac{1}{f_{\mathbf{B}}(\mathbf{b})} \int \int \dots \int a_i f_{\mathbf{B}|\mathbf{A}}(\mathbf{b} | \mathbf{a}) f_{\mathbf{A}}(\mathbf{a}) |da_1 da_2 \dots da_d|$$

เมื่อ $f_{\mathbf{B}}(\mathbf{b}) = \int \int \dots \int f_{\mathbf{B}|\mathbf{A}}(\mathbf{b} | \mathbf{a}) f_{\mathbf{A}}(\mathbf{a}) |da_1 da_2 \dots da_d|$

ซึ่งสมการนี้ คือ สมการที่ใช้ในการประมาณแบบผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยน้อยสุด (MMSE)

การประมาณแบบความน่าจะเป็นจริงสูงสุด (Maximum Likelihood, ML)

สำหรับการประมาณทางสถิติที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้ถึงแม้จะไม่ใช้การประมาณแบบเบส์ แต่ก็เป็นการประมาณที่ใช้หลักการคล้ายกัน กล่าวคือ ใช้หลักการหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นเงื่อนไข $f_{\mathbf{B}|\mathbf{A}}(\mathbf{b} | \mathbf{a})$ ในการหาฟังก์ชัน $\mathbf{d}(\mathbf{b})$ ดังต่อไปนี้

$$\mathbf{d}(\mathbf{b}) = \underset{\mathbf{a}}{\operatorname{arg\,max}} [f_{\mathbf{B}|\mathbf{A}}(\mathbf{b} | \mathbf{a})]$$

จะสังเกตเห็นว่าวิธีนี้เป็นวิธีที่มีหลักการประมาณตัวแปรคล้ายวิธีภายหลังสูงสุด (MAP) เพียงแต่สมมุติให้ ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น $f_{\mathbf{A}}(\mathbf{a})$ มีค่าเป็นหนึ่ง (Uniform PDF) ซึ่งทำให้วิธีนี้เป็นวิธีประมาณตัวแปรที่ง่ายเพราะไม่ต้องใช้ความรู้เกี่ยวกับลักษณะการกระจายตัวของตัวแปรที่จะประมาณนั่นเอง



ภาคผนวก ข
ตัวอย่างฟังก์ชันหัดตัวในอดีต

ต่อไปนี้จะยกตัวอย่างถึงฟังก์ชันหดตัวชนิดหลายตัวแปรที่มีการนำเสนอในอดีต

ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นก่อนหน้าเพียร์สันชนิดที่ 7

ในหัวข้อนี้จะศึกษาเวกเตอร์สุ่มเพียร์สันชนิดที่ 7 คอนทัวร์ทรงกลม (spherically contoured Pearson type VII random vectors) เพื่อใช้หาฟังก์ชันหดตัวชนิดหลายตัวแปร สมมติให้สัมประสิทธิ์เวฟเล็ทหลายตัวแปรมีการกระจายตัวแบบ เวกเตอร์สุ่มเพียร์สันชนิดที่ 7 คอนทัวร์ทรงกลม โดยมีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วม ดังต่อไปนี้

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = K \left(1 + \left(\frac{\|\mathbf{x}\|}{\lambda} \right)^2 \right)^{-m}$$

เมื่อ K คือ พารามิเตอร์บรรทัดฐาน, $\lambda = \sigma\sqrt{2m-3}$, m คือ ค่าภาวะยอดมนและ $m > 5/2$ และ σ^2 คือ ความแปรปรวน

ให้สัญญาณรบกวนในแต่ละสเกลมีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นเกาส์ ที่เป็นอิสระต่อกัน มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และความแปรปรวนสัญญาณรบกวน σ_n^2 จะได้ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วมของสัญญาณรบกวน คือ

$$f_{\mathbf{N}}(\mathbf{n}) = \frac{1}{(2\pi\sigma_n^2)^{d/2}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{n}\|^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

แก้สมการ MAP หา \hat{x}_i

$$\ln f_{\mathbf{N}}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \ln f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \ln \left(\frac{1}{(2\pi\sigma_n^2)^{d/2}} \right) - \frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2}{2\sigma_n^2} + \ln(K) - m \ln \left(1 + \left(\frac{\|\mathbf{x}\|}{\lambda} \right)^2 \right)$$

$$\frac{\partial [\ln f_{\mathbf{N}}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \ln f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})]}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{y_i - x_i}{\sigma_n^2} - \frac{2mx_i}{\lambda^2 + \|\mathbf{x}\|^2} = 0$$

$$x_i = \frac{y_i}{1 + \left(\frac{2m\sigma_n^2}{\lambda^2 + \|\mathbf{x}\|^2} \right)}$$

กำหนดให้ $r_{\text{PearsonShrink}} = \|\mathbf{x}\|$

$$x_i = \frac{y_i}{1 + \left(\frac{2m\sigma_n^2}{\lambda^2 + r_{PearsonShrink}^2} \right)}$$

สร้างนอร์ม (norm) โดย $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2}$ ดังนั้น

$$\|\mathbf{x}\| = \frac{\|\mathbf{y}\|}{1 + \left(\frac{2m\sigma_n^2}{\lambda^2 + r_{PearsonShrink}^2} \right)}$$

$$1 + \frac{2m\sigma_n^2}{\lambda^2 + r_{PearsonShrink}^2} = \frac{\|\mathbf{y}\|}{r_{PearsonShrink}}$$

หาค่า $r_{PearsonShrink}$ ดังนั้น

$$r_{PearsonShrink}^3 - \|\mathbf{y}\| r_{PearsonShrink}^2 + (\lambda^2 + 2m\sigma_n^2) r_{PearsonShrink} - \|\mathbf{y}\| \lambda^2 = 0$$

ใช้วิธีคาร์ดาโน (รายละเอียดในหน้า 33) หาค่า $r_{PearsonShrink}$ กำหนดให้ $i = 1$ จะได้ฟังก์ชันหาค่า
ชนิดหลายตัวแปร คือ

$$\hat{x}_1 = \frac{(r_{PearsonShrink})_+}{\|\mathbf{y}\|} y_1$$

เมื่อ

$$r_{PearsonShrink} = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} + \frac{\|\mathbf{y}\|}{3}$$

$$A = \frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, B = \frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \text{ ส่วนกรณี } \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0 \text{ ให้ } A = B = 0$$

$$p = \lambda^2 + 2m\sigma_n^2 - \frac{\|\mathbf{y}\|^2}{3},$$

$$q = -\lambda^2 \|\mathbf{y}\| + \frac{\|\mathbf{y}\|(\lambda^2 + 2m\sigma_n^2)}{3} - \frac{2(\|\mathbf{y}\|)^3}{27}, \lambda = \sqrt{(2m - 3)\sigma^2}$$

วิธีคาร์ดาโน (Cardano's method)

กำหนดให้ ฟังก์ชันกำลังสาม (Cubic Function) อยู่ในรูปแบบ ดังต่อไปนี้

$$f(x) = c_4x^3 + c_3x^2 + c_2x + c_1$$

เมื่อ $c_1, c_2, c_3, c_4 \in R, c_4 \neq 0$

นำสัมประสิทธิ์พจน์แรกหารตลอดเพื่อปรับสมการให้อยู่ในรูปแบบใหม่ ดังนี้

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

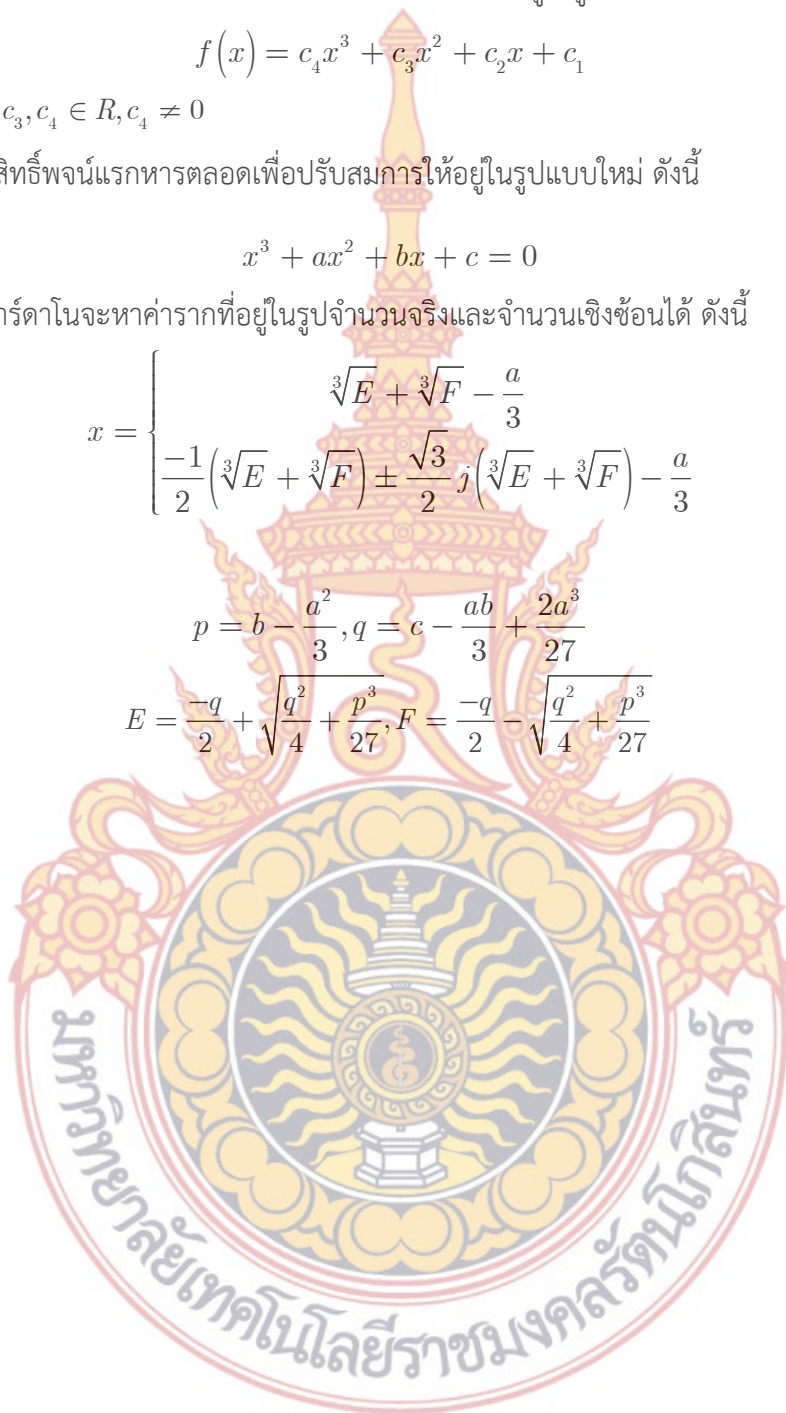
เมื่อใช้วิธีคาร์ดาโนจะหาค่ารากที่อยู่ในรูปจำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อนได้ ดังนี้

$$x = \begin{cases} \sqrt[3]{E} + \sqrt[3]{F} - \frac{a}{3} \\ -\frac{1}{2}(\sqrt[3]{E} + \sqrt[3]{F}) \pm \frac{\sqrt{3}}{2}j(\sqrt[3]{E} + \sqrt[3]{F}) - \frac{a}{3} \end{cases}$$

เมื่อ

$$p = b - \frac{a^2}{3}, q = c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27}$$

$$E = \frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, F = \frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$



ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นก่อนหน้าเพียร์สันชนิดที่ 3 หรือ แกมมาสองฝั่ง

ต่อไปนี้จะศึกษาเวกเตอร์สุ่มแกมมาสองฝั่งคอนทัวร์ทรงกลม (spherically contoured two-sided gamma random vectors) เพื่อใช้ในการสร้างฟังก์ชันหดตัวชนิดหลายตัวแปร สมมติให้สัมประสิทธิ์เวฟเล็ดหลายตัวแปรมีการกระจายตัวแบบเวกเตอร์สุ่มแกมมาสองฝั่งคอนทัวร์ทรงกลมโดยมี ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วม ดังต่อไปนี้

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = K \|\mathbf{x}\|^{-1/2} \exp\left(\frac{-\sqrt{3}\|\mathbf{x}\|}{2\sigma}\right)$$

เมื่อ σ^2 คือ ความแปรปรวน และ K คือ ค่าพารามิเตอร์บรรทัดฐาน

กำหนดให้สัญญาณรบกวนแต่ละสเกลมีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วม แก้มการ MAP หา \hat{x}_i

$$\ln f_{\mathbf{N}}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \ln f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \ln \left(\frac{1}{(2\pi\sigma_n^2)^{d/2}} \right) - \frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2}{2\sigma_n^2} + \ln(K) - \frac{1}{2} \ln(\|\mathbf{x}\|) - \frac{\sqrt{3}\|\mathbf{x}\|}{2\sigma}$$

$$\frac{\partial [\ln f_{\mathbf{N}}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \ln f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})]}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{y_i - x_i}{\sigma_n^2} - \frac{x_i}{2\|\mathbf{x}\|^2} - \frac{\sqrt{3}x_i}{2\sigma\|\mathbf{x}\|} = 0$$

$$x_i = \frac{y_i}{1 + \frac{\sigma_n^2}{2\|\mathbf{x}\|^2} + \frac{\sqrt{3}\sigma_n^2}{2\sigma\|\mathbf{x}\|}}$$

กำหนดให้ $r_{\text{GammaShrink}} = \|\mathbf{x}\|$

$$x_i = \frac{y_i}{1 + \frac{\sigma_n^2}{2r_{\text{GammaShrink}}^2} + \frac{\sqrt{3}\sigma_n^2}{2\sigma r_{\text{GammaShrink}}}}$$

สร้างนอร์ม โดย $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2}$ ดังนั้น

$$\|\mathbf{x}\| = \frac{\|\mathbf{y}\|}{1 + \frac{\sigma_n^2}{2r_{\text{GammaShrink}}^2} + \frac{\sqrt{3}\sigma_n^2}{2\sigma r_{\text{GammaShrink}}}}$$

$$1 + \frac{\sigma_n^2}{2r_{\text{GammaShrink}}^2} + \frac{\sqrt{3}\sigma_n^2}{2\sigma r_{\text{GammaShrink}}} = \frac{\|\mathbf{y}\|}{r_{\text{GammaShrink}}}$$

หาค่า $r_{\text{GammaShrink}}$

$$r_{\text{GammaShrink}}^2 + \left(\frac{\sqrt{3}\sigma_n^2}{2\sigma} - \|\mathbf{y}\| \right) r_{\text{GammaShrink}} + \frac{\sigma_n^2}{2} = 0$$

ดังนั้น

$$r_{\text{GammaShrink}} = \frac{-a + \sqrt{(a^2 - 2\sigma_n^2)_+}}{2}$$

เมื่อ

$$a = \frac{\sqrt{3}\sigma_n^2}{\sigma} - \|\mathbf{y}\|$$

กำหนด $i = 1$ จะได้ฟังก์ชันหดตัว คือ

$$\hat{x}_1 = \frac{(r_{\text{GammaShrink}})_+}{\|\mathbf{y}\|} y_1$$



ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นก่อนหน้าเพียร์สันชนิดที่ 3 หรือ Radial-Exponential

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาเวกเตอร์สุ่มร่วม Radial-Exponential เพื่อใช้ในการประมาณตัวแปร \hat{x} ด้วยวิธีประมาณแบบกำลังสองผิดพลาดน้อยสุด (วิธี MMSE) โดยสมมุติให้สัมพันธ์เวฟเล็ดแบบหลายตัวแปรมีการกระจายตัวแบบ Radial-Exponential d มิติ คือ \mathbf{X} ซึ่งสามารถสร้างได้จากเวกเตอร์สุ่ม Gaussian d มิติที่อิสระต่อกัน $\mathbf{S} \sim N(0, \sigma^2 \mathbf{I})$ และตัวแปรสุ่ม $Z \sim \text{Gamma } 1$ มิติ (Scalar) ที่อิสระต่อกันกับ \mathbf{S} ด้วย ดังนี้

$$\mathbf{X} = \sqrt{z}\mathbf{S}$$

โดย

$$f_{z,s}(z, \mathbf{s}) = f_z(z) f_s(\mathbf{s})$$

เมื่อ

$$f_s(\mathbf{s}) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{d/2}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{s}\|^2}{2\sigma^2}\right), \quad f_z(z) = 4z \exp(-2z), z > 0$$

กำหนดให้ $a = \sqrt{z}$ และเปลี่ยนตัวแปรจาก $(z, \mathbf{S}) \rightarrow (a, \mathbf{X})$

$$f_x(\mathbf{x}) = \int_0^\infty |J| f_z(a^2) f_s\left(\frac{\mathbf{x}}{a}\right) da$$

เมื่อ J คือ ตัวแปลงจาโคเบียน (รายละเอียดในหน้า 39) $J = 2a(1/a^d)$ ดังนั้น

$$f_x(\mathbf{x}) = \int_0^\infty 2a \left(\frac{1}{a^d}\right) f_z(a^2) f_s\left(\frac{\mathbf{x}}{a}\right) da$$

หา $f_Y(\mathbf{y})$ จาก

$$f_Y(\mathbf{y}) = \int_{R^d} f_X(\mathbf{x}) f_N(\mathbf{y} - \mathbf{x}) |d\mathbf{x}|$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} f_Y(\mathbf{y}) &= \int_{R^d} \left[\int_0^\infty 2a \left(\frac{1}{a^d}\right) f_z(a^2) f_s\left(\frac{\mathbf{x}}{a}\right) da \right] f_N(\mathbf{y} - \mathbf{x}) |d\mathbf{x}| \\ &= \int_0^\infty 2a f_z(a^2) \left[\int_{R^d} \left(\frac{1}{a^d}\right) f_s\left(\frac{\mathbf{x}}{a}\right) f_N(\mathbf{y} - \mathbf{x}) |d\mathbf{x}| \right] da \end{aligned}$$

จากงานวิจัยที่ [8]

$$\int_{R^d} \frac{1}{a^d} f_s\left(\frac{\mathbf{x}}{a}\right) f_N(\mathbf{y} - \mathbf{x}) |d\mathbf{x}| = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \frac{1}{(a^2\sigma^2 + \sigma_n^2)^{d/2}} \exp\left(\frac{-\|\mathbf{y}\|^2}{2(a^2\sigma^2 + \sigma_n^2)}\right)$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} f_Y(\mathbf{y}) &= \int_0^\infty 2af_z(a^2) \left[\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \frac{1}{(a^2\sigma^2 + \sigma_n^2)^{d/2}} \exp\left(\frac{-\|\mathbf{y}\|^2}{2(a^2\sigma^2 + \sigma_n^2)}\right) \right] da \\ &= \int_0^\infty \frac{8a^3}{(2\pi)^{d/2} (a^2\sigma^2 + \sigma_n^2)^{d/2}} \exp\left(-2a^2 - \frac{\|\mathbf{y}\|^2}{2(a^2\sigma^2 + \sigma_n^2)}\right) da \end{aligned}$$

เปลี่ยนตัวแปรจาก $a \rightarrow t$ เมื่อ $t = 2a^2 + 2\sigma_n^2/\sigma^2$, $dt = 4ada$

$$f_Y(\mathbf{y}) = \frac{\exp(2\sigma_n^2/\sigma^2)}{(\pi\sigma^2)^{d/2}} \int_{\frac{2\sigma_n^2}{\sigma^2}}^\infty \frac{(t - 2\sigma_n^2/\sigma^2)}{t^{d/2}} \exp\left(-t - \frac{\|\mathbf{y}\|^2}{\sigma^2 t}\right) dt$$

เขียน $f_Y(\mathbf{y})$ ใหม่ในรูป generalized incomplete gamma function ซึ่งนิยามดังต่อไปนี้ (รายละเอียดในหน้า 42)

$$\Gamma(\alpha, x; b) = \int_x^\infty t^{\alpha-1} \exp(-t - b/t) dt$$

เมื่อกำหนดให้ $\alpha = \{\dots, -3/2, -1/2\}$ และ $x, b > 0$ ซึ่งมีความสัมพันธ์เวียนบังเกิด คือ

$$\Gamma(\alpha - 1, x; b) = \frac{1}{b} \left[\Gamma(\alpha + 1, x; b) - \alpha \Gamma(\alpha, x; b) - x^\alpha \exp(-x - b/x) \right].$$

ดังนั้น

$$f_Y(\mathbf{y}) = \frac{\exp(2\sigma_n^2/\sigma^2)}{(\pi\sigma^2)^{d/2}} \left[\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}, \frac{2\sigma_n^2}{\sigma^2}; \frac{\|\mathbf{y}\|^2}{\sigma^2}\right) - \frac{2\sigma_n^2}{\sigma^2} \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}, \frac{2\sigma_n^2}{\sigma^2}; \frac{\|\mathbf{y}\|^2}{\sigma^2}\right) \right]$$

หาค่า $A = \int_{R^d} x_i f_x(\mathbf{x}) f_N(\mathbf{y} - \mathbf{x}) |d\mathbf{x}|$

$$\begin{aligned} A &= \int_{R^d} x_i \left[\int_0^\infty 2a \left(\frac{1}{a}\right) f_z(a^2) f_s\left(\frac{\mathbf{x}}{a}\right) da \right] f_N(\mathbf{y} - \mathbf{x}) |d\mathbf{x}| \\ &= \int_0^\infty 2af_z(a^2) \left[\int_{R^d} x_i \left(\frac{1}{a}\right) f_s\left(\frac{\mathbf{x}}{a}\right) f_N(\mathbf{y} - \mathbf{x}) |d\mathbf{x}| \right] da \end{aligned}$$

จากงานวิจัยที่ [8]

$$\int_{R^d} x_i \frac{1}{a^d} f_s\left(\frac{\mathbf{x}}{a}\right) f_N(\mathbf{y} - \mathbf{x}) |d\mathbf{x}| = \frac{y_i a^2 \sigma^2}{(a^2\sigma^2 + \sigma_n^2)} \frac{1}{(2\pi(a^2\sigma^2 + \sigma_n^2))^{d/2}} \exp\left(\frac{-\|\mathbf{y}\|^2}{2(a^2\sigma^2 + \sigma_n^2)}\right)$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{\infty} 2af_z(a^2) \frac{y_i a^2 \sigma^2}{(a^2 \sigma^2 + \sigma_n^2)} \frac{1}{(2\pi(a^2 \sigma^2 + \sigma_n^2))^{d/2}} \exp\left(\frac{-\|\mathbf{y}\|^2}{2(a^2 \sigma^2 + \sigma_n^2)}\right) da \\
&= \int_0^{\infty} \frac{8a^5 y_i \sigma^2}{(2\pi)^{d/2} (a^2 \sigma^2 + \sigma_n^2)^{d/2+1}} \exp\left(-2a^2 - \frac{\|\mathbf{y}\|^2}{2(a^2 \sigma^2 + \sigma_n^2)}\right) da
\end{aligned}$$

เปลี่ยนตัวแปรจาก $a \rightarrow t$

$$A = \frac{4 \exp(2\sigma_n^2/\sigma^2) y_i}{(\pi\sigma^2)^{d/2}} \int_{\frac{2\sigma_n^2}{\sigma^2}}^{\infty} \frac{\left(t^4/4 - (\sigma_n^2/\sigma^2)t + (\sigma_n^2/\sigma^2)^2\right)}{t^{d/2+1}} \exp\left(-t - \frac{\|\mathbf{y}\|^2}{\sigma^2 t}\right) dt$$

เขียน A ในรูป generalized incomplete gamma function

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\exp(2\sigma_n^2/\sigma^2) y_i}{(\pi\sigma^2)^{d/2}} \left[\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}, \frac{2\sigma_n^2}{\sigma^2}; \frac{\|\mathbf{y}\|^2}{\sigma^2}\right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{4\sigma_n^2}{\sigma^2} \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}, \frac{2\sigma_n^2}{\sigma^2}; \frac{\|\mathbf{y}\|^2}{\sigma^2}\right) + 4 \left(\frac{\sigma_n^2}{\sigma^2}\right)^2 \Gamma\left(-\frac{d}{2}, \frac{2\sigma_n^2}{\sigma^2}; \frac{\|\mathbf{y}\|^2}{\sigma^2}\right) \right]
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\hat{x}_i = y_i \frac{\left[\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}, \frac{2\sigma_n^2}{\sigma^2}; \frac{\|\mathbf{y}\|^2}{\sigma^2}\right) - \frac{4\sigma_n^2}{\sigma^2} \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}, \frac{2\sigma_n^2}{\sigma^2}; \frac{\|\mathbf{y}\|^2}{\sigma^2}\right) + 4 \left(\frac{\sigma_n^2}{\sigma^2}\right)^2 \Gamma\left(-\frac{d}{2}, \frac{2\sigma_n^2}{\sigma^2}; \frac{\|\mathbf{y}\|^2}{\sigma^2}\right) \right]}{\left[\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}, \frac{2\sigma_n^2}{\sigma^2}; \frac{\|\mathbf{y}\|^2}{\sigma^2}\right) - \frac{2\sigma_n^2}{\sigma^2} \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}, \frac{2\sigma_n^2}{\sigma^2}; \frac{\|\mathbf{y}\|^2}{\sigma^2}\right) \right]}$$

กำหนดให้ $i = 1$ และ $d = 3$ ใช้ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด generalized incomplete gamma function จะพบว่า

$$\hat{x}_1 = y_1 \frac{\left[\left(1 + \frac{4(\sigma_n^2)^2}{\sigma^2 \|\mathbf{y}\|^2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{2\sigma_n^2}{\sigma^2}; \frac{\|\mathbf{y}\|^2}{\sigma^2}\right) + \left(\frac{2(\sigma_n^2)^2}{\sigma^2 \|\mathbf{y}\|^2} - \frac{4\sigma_n^2}{\sigma^2}\right) \Gamma\left(-\frac{1}{2}, \frac{2\sigma_n^2}{\sigma^2}; \frac{\|\mathbf{y}\|^2}{\sigma^2}\right) \right.}{\left[\frac{(2\sigma_n^2)^{3/2}}{(\sigma^2)^{1/2} \|\mathbf{y}\|^2} \exp\left(-\frac{2\sigma_n^2}{\sigma^2} - \frac{\|\mathbf{y}\|^2}{2\sigma_n^2}\right) \right.} \\
\left. \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{2\sigma_n^2}{\sigma^2}; \frac{\|\mathbf{y}\|^2}{\sigma^2}\right) - \frac{2\sigma_n^2}{\sigma^2} \Gamma\left(-\frac{1}{2}, \frac{2\sigma_n^2}{\sigma^2}; \frac{\|\mathbf{y}\|^2}{\sigma^2}\right) \right] \right]}$$

การแปลงจาโคเบียน (Jacobian transform)

การแปลงจาโคเบียนกรณี 2 ตัวแปร

ในกรณีเปลี่ยนโดเมนจาก $v - w$ ไป $x - y$ โดยต้องการรักษาพื้นที่ให้เท่าเดิม เราจำเป็นต้องรู้ถึงตัวแปลงจาโคเบียน คือ อัตราส่วนระหว่างพื้นที่เก่าต่อพื้นที่ใหม่ $J = A(R)/A(R')$ ซึ่งสามารถหาค่าได้ ดังต่อไปนี้

$$\text{ถ้า } v = \phi(x, y), w = \varphi(x, y)$$

$$\text{พิจารณาจุด } P_1 : (v_1, w_1) = (\phi(x, y), \varphi(x, y))$$

$$P_2 : (v_2, w_2) = (\phi(x + dx, y), \varphi(x + dx, y))$$

$$P_3 : (v_3, w_3) = (\phi(x, y + dy), \varphi(x, y + dy))$$

พิจารณาจุด P_2

พิจารณาฟังก์ชัน $\phi(x + dx, y), \varphi(x + dx, y)$ ด้วยอนุกรม Taylor รอบจุด x ดังนี้

$$\phi(x + dx, y) \approx \phi(x, y) + \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} dx$$

$$\varphi(x + dx, y) \approx \varphi(x, y) + \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} dx$$

พิจารณาจุด P_3

พิจารณาฟังก์ชัน $\phi(x + dx, y), \varphi(x + dx, y)$ ด้วยอนุกรม Taylor รอบจุด y ดังนี้

$$\phi(x, y + dy) \approx \phi(x, y) + \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} dy$$

$$\varphi(x, y + dy) \approx \varphi(x, y) + \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} dy$$

ดังนั้นสามารถเขียนจุด P_2 และ P_3 ใหม่ได้ว่า

$$P_2 : (v_2, w_2) = \left(\phi(x, y) + \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} dx, \varphi(x, y) + \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} dx \right)$$

$$P_3 : (v_3, w_3) = \left(\phi(x, y) + \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} dy, \varphi(x, y) + \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} dy \right)$$

สร้างเวกเตอร์ \mathbf{v}_1 จากจุด P_1 ไป P_2

$$\mathbf{v}_1 = \left[\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} dx, \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} dx \right]^T$$

สร้างเวกเตอร์ \mathbf{v}_2 จากจุด P_1 ไป P_3

$$\mathbf{v}_2 = \left[\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial y} dy, \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} dy \right]^T$$

หาพื้นที่ $A(R)$ โดยใช้วิธีเวกเตอร์

$$A(R) = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi(x,y)}{\partial x} dx & \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x} dx \\ \frac{\partial \phi(x,y)}{\partial y} dy & \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} dy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi(x,y)}{\partial y} & \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} \end{vmatrix} dx dy$$

เราทราบว่าพื้นที่ $A(R') = dx dy$

จาโคเบียน (Jacobian) คือ อัตราส่วนระหว่างพื้นที่เก่า $A(R)$ และใหม่ $A(R')$ ดังนี้

$$J = \frac{A(R)}{A(R')} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial \phi(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi(x,y)}{\partial y} & \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} \end{vmatrix}}$$

ประยุกต์การแปลงจาโคเบียนกับ ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น (PDF) เพราะโอกาสความน่าจะเป็น (อินทิเกรตพื้นที่กราฟ) จะต้องเท่ากันเสมอไม่ว่าโดเมนใดก็ตาม สำหรับกรณีที่เปลี่ยนโดเมนจาก $v - w$ ไป $x - y$ จะพบว่า

$$\iint_R f_{V,W}(v,w) dv dw \neq \iint_{R'} f_{V,W}(\phi(x,y), \varphi(x,y)) dx dy$$

เพราะ $dv dw \neq dx dy$ แต่ $dv dw = |J| dx dy$ ดังนั้น

$$\iint_R f_{V,W}(v,w) dv dw = \iint_{R'} |J| f_{V,W}(\phi(x,y), \varphi(x,y)) dx dy$$

ดังนั้น PDF $f_{X,Y}(x,y)$ เมื่อพิจารณาจาก PDF $f_{V,W}(v,w)$ คือ

$$f_{X,Y}(x,y) = |J| f_{V,W}(\phi(x,y), \varphi(x,y))$$

การแปลงจาโคเบียนกรณี d - Dimension

เมื่อต้องการเปลี่ยนโดเมน s_1, s_2, \dots, s_d ไป x_1, x_2, \dots, x_d เมื่อ $s_1 = h_1(x_1, x_2, \dots, x_d)$ และ $s_2 = h_2(x_1, x_2, \dots, x_d), \dots, s_d = h_d(x_1, x_2, \dots, x_d)$ จะได้ว่า

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial s_1}{\partial x_1} & \frac{\partial s_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial s_d}{\partial x_1} \\ \frac{\partial s_1}{\partial x_2} & \frac{\partial s_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial s_d}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial s_1}{\partial x_d} & \frac{\partial s_2}{\partial x_d} & \dots & \frac{\partial s_d}{\partial x_d} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_d}{\partial x_1} \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h_d}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_d} & \frac{\partial h_2}{\partial x_d} & \dots & \frac{\partial h_d}{\partial x_d} \end{vmatrix}$$

ดังนั้น PDF ของ $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ เมื่อพิจารณาจาก $f_{\mathbf{s}}(\mathbf{s})$ คือ

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = |J| f_{\mathbf{s}}(h_1(x_1, x_2, \dots, x_d), h_2(x_1, x_2, \dots, x_d), \dots, h_d(x_1, x_2, \dots, x_d))$$



Generalized Incomplete Gamma Function

สำหรับ generalized incomplete gamma function ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะใช้วิธีที่นำเสนอและแนวทางในการคำนวณโดยงานวิจัยที่ [8] กล่าวคือ กำหนดให้ ฟังก์ชันพิเศษชนิดนี้อยู่ในรูป

$$\Gamma(\alpha, x; b) = \int_x^{\infty} t^{\alpha-1} \exp\left(-t - \frac{b}{t}\right) dt$$

เมื่อกำหนดให้ $\alpha = \{\dots, -3/2, -1/2\}$ และ $x, b > 0$ ซึ่งมีความสัมพันธ์เวียนบังเกิด คือ

$$\Gamma(\alpha - 1, x; b) = \frac{1}{b} \left[\Gamma(\alpha + 1, x; b) - \alpha \Gamma(\alpha, x; b) - x^\alpha \exp\left(-x - \frac{b}{x}\right) \right].$$

เมื่อ

$$\Gamma(1/2, x; b) = 0.5\sqrt{\pi} \exp(-x)(A + B), \quad \Gamma(-1/2, x; b) = 0.5\sqrt{\pi/b} \exp(-x)(A - B)$$

โดยกรณีที่ $x \geq 2\sqrt{b}$, จะพบว่า $A = \exp(-b/x) \operatorname{erfcx}\left(\sqrt{x} - \sqrt{b/x}\right)$

และกรณี $x < 2\sqrt{b}$ จะพบว่า $A = \exp(x - 2\sqrt{b}) \operatorname{erfc}\left(\sqrt{x} - \sqrt{b/x}\right)$

และ $B = \exp(-b/x) \operatorname{erfcx}\left(\sqrt{x} + \sqrt{b/x}\right)$ ในทั้งสองกรณี





ประวัตินักวิจัย

ประวัติผู้วิจัย

1. ชื่อ - นามสกุล ดร.พิชิต กิตติสุวรรณ

2. ตำแหน่งปัจจุบัน อาจารย์

3. หน่วยงานและสถานที่ติดต่อได้

สาขาวิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม คณะวิศวกรรมศาสตร์ ศาลายา มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี โทร. 02-889-4585-7 ต่อ 2640
E-mail: pichidkit@yahoo.com และ Pichid.Kit@rmutr.ac.th

4. ประวัติการศึกษา

ปริญญาเอก	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย	สาขาวิศวกรรมไฟฟ้าสื่อสาร 2553
ปริญญาโท	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย	สาขาวิศวกรรมไฟฟ้าสื่อสาร 2551
ปริญญาตรี	มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์	สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า 2548

5. สาขาวิชาการที่มีความชำนาญพิเศษ (แตกต่างจากวุฒิการศึกษา)

- Bayesian estimation
- Image denoising
- Wavelet transform

