กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยจากงบประมาณเงินแผ่นดิน ประจำปีงบประมาณ 2557 มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลรัตนโกสินทร์

ขอขอบคุณมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลรัตนโกสินทร์ ที่ให้การสนับสนุนงบประมาณสำหรับดำเนินการวิจัยในครั้งนี้

ธมนวรรณ แสงงามมงคล และคณะ
กันยายน 2557

บทคัดย่อ

รหัสโครงการ : A65/2557

โครงการวิจัย : จำนวนจับคู่และจำนวนเส้นปกคลุมบนผลคูณมอดูลาร์ของกราฟอย่างง่าย

ชื่อนักวิจัย : ผู้ช่วยศาสตราจารย์ธมนวรรณ แสงงามมงคล
รองศาสตราจารย์ธานินทร์ สิทธิวิรัชธรรม

ผลคูณมอดูลาร์ $G_1 \Diamond G_2$ ของกราฟ G_1 และ G_2 คือกราฟที่มีเซตของจุดคือ $V(G_1 \Diamond G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$ และมีเซตของเส้นคือ $E(G_1 \Diamond G_2) = \{(u_1, v_1)(u_2, v_2) \mid [u_1u_2 \in E(G_1)$ และ $v_1v_2 \in E(G_2)] \cup [u_1u_2 \notin E(G_1)$ และ $v_1v_2 \notin E(G_2)]\}$

งานวิจัยนี้ ได้สูตรทั่วไปในการหาค่ากราฟพารามิเตอร์เชิงเส้นสองตัว คือจำนวนจับคู่และจำนวนเส้นปกคลุม บนผลคูณมอดูลาร์ของกราฟอย่างง่ายและกราฟสองส่วนบริบูรณ์

คำสำคัญ : Matching Number, Edge Covering Number, Modular Product

---

E-mail Address : **Thamonwan.s@rmutr.ac.th**

ระยะเวลาโครงการ : ตุลาคม 2556 - กันยายน 2557

Abstract

Code of project : **A65/2557**
Project name : Matching and Edge Covering Number on Modular Product of Simple Graph
Researcher name : Assistant Professor Thamonwan Saengngammongkhol
Associate Professor Thanin Sitthiwirattham

The Modular Product $G_1 \lozenge G_2$ of graph G_1 and graph G_2 has vertex set $V(G_1 \lozenge G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$ and edge set
$E(G_1 \lozenge G_2) = \{(u_1, v_1)(u_2, v_2) \mid [u_1u_2 \in E(G_1) \text{ and } v_1v_2 \in E(G_2)] \cup [u_1u_2 \notin E(G_1) \text{ and } v_1v_2 \notin E(G_2)]\}$

In this research, we determine generalizations of two edge-graph parameters are matching number and edge covering number on Modular product of simple graph and complete bipartite graph.

Keywords : **Matching Number, Edge Covering Number, Modular Product**

E-mail Address : **Thamonwan .s@rmutr.ac.th**
Period of project : October 2013 – September 2014

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

สารบัญภาพ

บทที่ 1
บทนำ

1. ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

เป็นที่ยอมรับกันโดยทั่วไปว่าทฤษฎีกราฟ เป็นสาขาหนึ่งของคณิตศาสตร์ที่ได้รับการพัฒนาไปอย่างรวดเร็วทั้งทางด้านทฤษฎีและการประยุกต์ สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในศาสตร์สาขาอื่นๆได้อีกมากมาย ที่เป็นเช่นนี้เนื่องจากกราฟเป็นระบบคณิตศาสตร์ที่ไม่ซับซ้อนมีลักษณะเป็นรูปธรรม กล่าวคือ กราฟประกอบด้วยเซตของจุด V และเซตของเส้น E ซึ่งเป็นคู่ไม่อันดับที่มีสมาชิกมาจากเซต V โดยที่เซต E จะเป็นตัวบอกความสัมพันธ์ของคู่สมาชิกใดๆในเซต V ดังนั้นกราฟจึงเหมาะที่จะใช้ในการประยุกต์ เพื่อช่วยในการอธิบายปัญหา และแก้ปัญหาในสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องได้ ซึ่งในการแก้ปัญหานั้น เราจำเป็นที่ต้องมีความรู้และเข้าใจในทางทฤษฎีเป็นอย่างดี เพราะฉะนั้นการคิดค้นความรู้และทฤษฎีบทใหม่ จึงเป็นสิ่งที่จำเป็น ซึ่งทางผู้วิจัยได้คำนึงถึงสิ่งดังกล่าว ด้วยเหตุนี้ผู้วิจัยจึงสนใจในการสร้างทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับโครงสร้างของกราฟและการกระทำบนกราฟต่างๆ ซึ่งในที่นี้ก็คือ กราฟพารามิเตอร์บนกราฟที่เกิดจากผลคูณของกราฟสองกราฟนั่นเอง กราฟที่จะศึกษาจะเป็นกราฟอย่างง่ายและสัญลักษณ์ต่างๆที่ใช้เป็นสัญลักษณ์มาตรฐานที่พบในตำราทางทฤษฎีกราฟทั่วไป

จากการศึกษาเอกสารเอกสารที่เกี่ยวข้องกับการวิจัยทางทฤษฎีกราฟจะพบว่ามีผลงานที่เกี่ยวข้องกับกราฟพารามิเตอร์ต่างๆ เช่น Clique Numbers, Matching Number, Chromatic Number, Sum Number, Independent Number, Domination Number, Hamiltonian Number, Forest Number และ Decycling Number บนกราฟชนิดต่างๆ เช่น Regular Graph, Cubic Graph, Complement of Graph, Complete Bipartite Graphs, Square of Complete Graphs, Jump Graphs, Tree, Weel และ Weighted Graphs เป็นต้น และยังพบว่ามีการศึกษากราฟพารามิเตอร์ต่างๆบนกราฟที่เกิดจากการกระทำต่างๆบนกราฟเช่น กราฟเติมเต็ม (Complement Graph), กราฟร่วม (Joined Graph), กราฟผลต่าง (Difference Graph) หรือผลคูณต่างๆเช่น ผลคูณคาร์ทีเชียน (Cartesian Product), ผลคูณโครเน็กเกอร์หรือผลคูณเท็นเซอร์หรือผลคูณตรง (Kronecker, Tensor, Direct Product), ผลคูณเข้ม (Strong Product) และผลคูณเล็กซิโคกราฟิกคัล (Lexicographical Product) ของกราฟอย่างง่ายใดๆกับกราฟลักษณะเฉพาะต่างๆ

ผู้วิจัยมีความประสงค์ที่จะทำวิจัยเพื่อหาค่ากราฟพารามิเตอร์ จำนวนจับคู่ (Matching Number : α') และจำนวนเส้นปกคลุม (Edge Covering Number : β') บนผลคูณมอดูลาร์ (Modular Product) ของกราฟอย่างง่ายและกราฟสองส่วนบริบูรณ์ ในการศึกษาและวิจัยในครั้งนี้ ผู้วิจัยคาดว่าจะได้ทฤษฎีบทในการหาค่าของจำนวนจับคู่และจำนวนเส้นปกคลุมบนผลคูณมอดูลาร์ของกราฟอย่างง่ายและกราฟสองส่วนบริบูรณ์ ซึ่งองค์ความรู้ดังกล่าวสามารถนำไปพัฒนางานวิจัยเกี่ยวกับกราฟอื่นๆที่เป็นผลลัพธ์ของการกระทำบนกราฟอื่นๆต่อไป และอาจเป็นพื้นฐานในการพัฒนาวิชาการในสาขาวิชาที่เกี่ยวข้องอันจะเป็นพื้นฐานในการพัฒนาประเทศต่อไป

2. วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. สร้างและพิสูจน์ทฤษฎีบทเพื่อหาจำนวนจับคู่ บนผลคูณมอดูลาร์ของกราฟอย่างง่ายและกราฟสองส่วนบริบูรณ์

2. สร้างและพิสูจน์ทฤษฎีบทเพื่อหาจำนวนเส้นปกคลุม บนผลคูณมอดูลาร์ของกราฟอย่างง่ายและกราฟสองส่วนบริบูรณ์

3. กรอบแนวคิดการวิจัย

สร้างและพิสูจน์ทฤษฎีบทในการหาค่ากราฟพารามิเตอร์สองตัว คือจำนวนจับคู่และจำนวนเส้นปกคลุมบนกราฟที่เป็นผลคูณมอดูลาร์ระหว่างกราฟอย่างง่ายใดๆกับกราฟสองส่วนบริบูรณ์

4. นิยามศัพท์

ผลคูณโครเน็คเกอร์ (Kronecker Products) $G_1 \otimes G_2$ ของกราฟ G_1 และ G_2 คือกราฟที่มีเซตของจุดคือ $V(G_1 \otimes G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$ และเซตของเส้นคือ $E(G_1 \otimes G_2) = \{(u_1, v_1)(u_2, v_2) / u_1u_2 \in E(G_1)$ และ $v_1v_2 \in E(G_2)\}$

ผลคูณมอดูลาร์ (Modular Product) $G_1 \Diamond G_2$ ของกราฟ G_1 และ G_2 คือกราฟที่มีเซตของจุดเป็น $V(G_1 \Diamond G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$ และมีเซตของเส้นเป็น $E(G_1 \Diamond G_2) = \{(u_1, v_1)(u_2, v_2) \mid [u_1u_2 \in E(G_1) \text{ and } v_1v_2 \in E(G_2)]$ $\cup$ $[u_1u_2 \notin E(G_1) \text{ and } v_1v_2 \notin E(G_2)]\}$

เซตย่อยของ $E(G)$ ของ G เรียกว่า “ จับคู่หรือเซตเส้นอิสระ (matching or independent edge set) M ” เมื่อไม่มีสองเส้นใดๆที่ต่างกันใน M มีจุดร่วมกัน และ M เป็นการจับคู่ใหญ่สุด G เมื่อไม่มีการจับคู่ M' ของ G ที่ทำให้ $|M'| > |M|$ สำหรับการจับคู่ ที่มีจำนวนเส้นมากที่สุด เรียกจำนวนเส้นมากที่สุดนั้นว่า **“จำนวนจับคู่ (matching number)”** ของ G เขียนแทนด้วย $\alpha'(G)$

เส้นในกราฟ G ปกคลุม (cover) สองจุดที่ตกกระทบกับเส้นนั้น และเส้นปกคลุมในกราฟ G คือเซตของเส้นในกราฟ G ที่ปกคลุมทุกจุดในกราฟ G สำหรับเซตเส้นปกคลุมของ G ที่มีจำนวนเส้นน้อยที่สุด เรียกจำนวนเส้นน้อยที่สุดนั้นว่า **“จำนวนเส้นปกคลุม (edge covering number)”** ของ G เขียนแทนด้วย $\beta'(G)$

6. ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้องค์ความรู้ใหม่และทฤษฎีบทใหม่ที่เกี่ยวข้องกับกราฟพารามิเตอร์เชิงเส้น คือจำนวนจับคู่และจำนวนเส้นปกคลุม บนผลคูณมอดูลาร์ระหว่างกราฟอย่างง่ายใดๆกับกราฟสองส่วนบริบูรณ์

2. ได้บทความวิจัยเพื่อตีพิมพ์ในวารสารนานาชาติ เป็นการเผยแพร่ผลงานและชื่อเสียงของนักคณิตศาสตร์ไทย

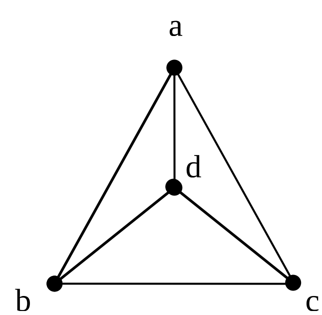
บทที่ 2
ทบทวนวรรณกรรมที่เกี่ยวข้อง

1. บทนิยามเกี่ยวกับทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

บทนิยาม 1.1 กราฟ G = (V,E) ประกอบไปด้วยเซต $V \neq \phi$ และเซต E ซึ่งเป็นเซตของคู่ที่ไม่เป็นลำดับ สมาชิกของ E ว่าเส้น (edge หรือ line)

ถ้าต้องการระบุว่า V เป็นเซตของจุด และ E เป็นเซตของเส้นของกราฟ G จะเขียนแทนด้วย V(G) และ E(G)

ตัวอย่าง 1.1 ให้ G เป็นกราฟที่แสดงดังรูป



ภาพที่ 1 จุดยอดและเส้น

จะได้ V(G) = {a, b, c, d} และ E(G) = {ab, ac, ad, bc, bd, cd}

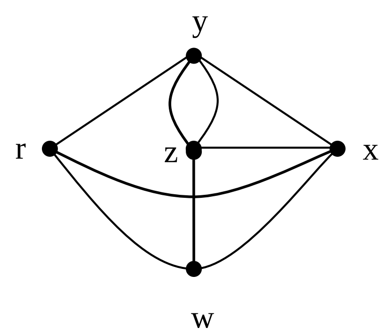
บทนิยาม 1.2 ให้ u และ v เป็นจุดในกราฟ G เรากล่าวว่า u ประชิด (adjacent) กับ v เมื่อมีเส้นใน G เชื่อมระหว่างจุด u และ v และจะเขียนแทนเส้นดังกล่าวด้วย uv และจะเรียกจุด u และ v ว่าจุดปลายของเส้น uv

ถ้า e = uv เป็นเส้นในกราฟ G แล้ว เรากล่าวว่าจุด u ตกกระทบ (incident) กับเส้น e หรือเส้น e ตกกระทบกับจุด u

และถ้า $e \neq f$ โดยที่ f เป็นเส้นใน G ที่ตกกระทบกับจุดเดียวกันแล้ว เรากล่าวว่า e ประชิดกับ f หรือ e และ f ประชิดกัน

โดยทั่วไปเราจะแทนจุดในกราฟด้วยจุดในระนาบ และเส้นในกราฟด้วยเส้นที่เชื่อมระหว่างจุดสองจุดในระนาบ และเป็นที่เข้าใจกันว่าในการเขียนรูปของกราฟนั้นจะไม่มีเส้นใดตัดกับตัวมันเองหรือลากผ่านจุดที่ไม่ใช่จุดปลายของเส้นนั้น ยิ่งไปกว่านั้นเส้นสองเส้นของกราฟอาจลากผ่านกันหรือตัดกันได้โดยไม่ทำให้เกิดจุดใหม่ เช่นเส้น rx และ zw ในตัวอย่างที่ 1.2

ตัวอย่าง 1.2 จากกราฟในภาพ 1.1.1 จะเห็นว่าจุด x ประชิดกับ y, z, w และ r ซึ่งจุด r ตกกระทบกับเส้น ry, rx, และ rw



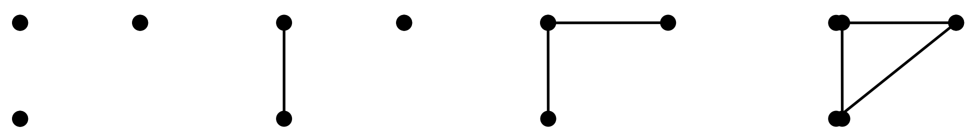
ภาพที่ 2 จุดประชิดและจุดตกกระทบ

บทนิยาม 1.3 : เรียกกราฟที่ไม่มีเส้นหลายชั้น (multiple edges) และไม่มีรูปบ่วง (loop) ว่า กราฟอย่างง่าย (simple graph) โดยที่

เส้นหลายชั้นคือ มีหลายเส้นที่เชื่อมระหว่างจุด 2 จุด

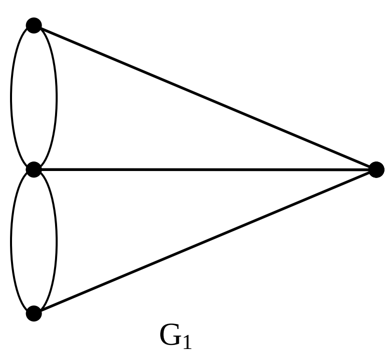
รูปบ่วงคือ ใน 1 จุดจะมีเส้นตัวมันเอง

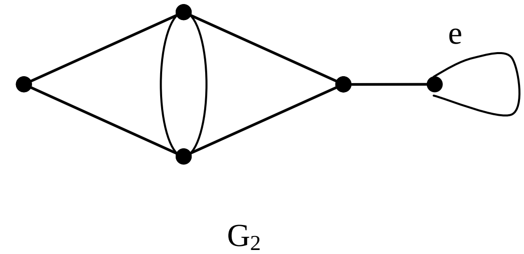
ตัวอย่าง 1.3 แสดงภาพของกราฟอย่างง่ายที่มีจำนวนจุดเป็น 3



ภาพที่ 3 กราฟอย่างง่ายที่มีจำนวนจุดเป็น 3

ตัวอย่าง 1.4 กราฟ G_1 เป็นตัวอย่างของกราฟที่มีเส้นหลายชั้น กราฟ G_2 เป็นตัวอย่างของกราฟที่มีเส้นหลายชั้นและมีเส้น e เป็นรูปบ่วง ดังนั้น กราฟ G_1 และกราฟ G_2 ไม่เป็นกราฟอย่างง่าย





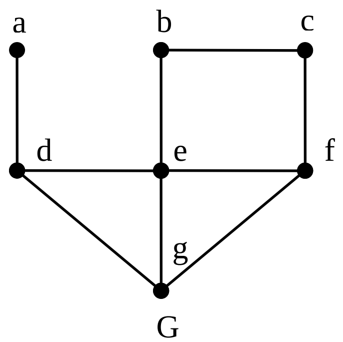
ภาพที่ 4 กราฟที่ไม่ใช่กราฟอย่างง่าย

บทนิยาม 1.4 ให้ u เป็นจุดในกราฟ G ดีกรี (degree) ของ u ใน G เขียนแทนด้วย $d_G(u)$ คือ จำนวนของเส้นใน G ที่ตกกระทบกับจุด u และจุดที่มีดีกรี 1 จะเรียกว่า จุดปลาย (end-vertex)

Maximum degree คือ ดีกรีที่มากที่สุดในกราฟ G ใช้สัญลักษณ์คือ $\Delta(G)$

Minimum degree คือ ดีกรีที่น้อยที่สุดในกราฟ G ใช้สัญลักษณ์คือ $\delta(G)$

ตัวอย่าง 1.5 ให้ G เป็นกราฟที่แสดงดังรูป



จะได้ว่า $\Delta(G)$ = 4 , $\delta(G)$ = 1

และ $d_G(a)$ = 1 , $d_G(b)$ = 2

$d_G(c)$ = 2 , $d_G(d)$ = 3

$d_G(e)$ = 4 , $d_G(f)$ = 3

$d_G(g)$ = 3

ภาพที่ 5 ดีกรีมากที่สุด และดีกรีน้อยที่สุด

บทนิยาม 1.5 จะกล่าวว่า $H(V_H,E_H)$ เป็นกราฟย่อย (subgraph) ของกราฟ $G(V_G,E_G)$ เมื่อ $V_H \subseteq V_G$ และ $E_H \subseteq E_G$ และจะกล่าวว่า H เป็นกราฟย่อยแผ่ทั่ว (spanning subgraph) ของ G เมื่อ H เป็นกราฟย่อยของ G และ $V_H = V_G$

ตัวอย่าง 1.6 ภาพที่ 6 แสดงให้เห็นกราฟ H เป็นกราฟย่อยของ G

กราฟ G กราฟ H

ภาพที่ 6 กราฟย่อย

บทนิยาม 1.6 ให้ u และ v เป็นจุดใดๆในกราฟ (u และ v อาจเป็นจุดเดียวกัน) ทางเดิน u-v (u-v walk) ใน G คือลำดับสลับของจุดและเส้น เขียนแทนโดย

$w = \langle u = u_0, e_1, u_1, e_2, u_2, \ldots, u_{n-1}, e_n, u_n = v \rangle$

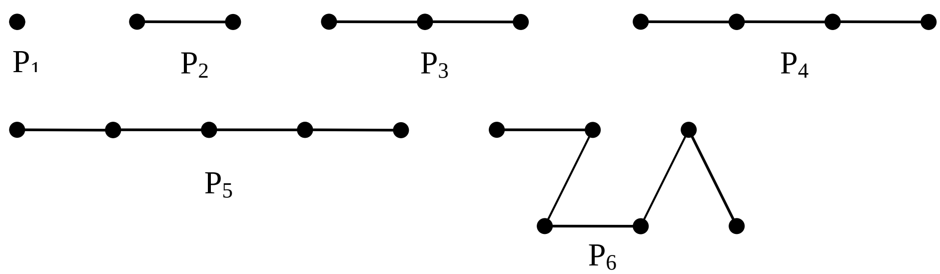
ที่เริ่มต้นด้วยจุด u และจบด้วยจุด v และสำหรับ i = 1,2,...,n จุดปลายของเส้น e_i คือ u_{i-1} และ u_i

บทนิยาม 1.7 ความยาวของทางเดิน u-v คือ จำนวนของเส้นในลำดับ ในกรณีที่ความยาวของทางเดินเป็น 0 จะเรียกทางเดินนั้นว่า ทางเดินโดดเดี่ยว (trivial walk) เรียก $u_0 = u$ และ $u_n = v$ ว่า จุดเริ่มต้น (origin) และจุดปลาย (end point) ของทางเดิน u-v เรียกจุด $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ ว่า จุดภายใน (interval vertices)

บทนิยาม 1.8 จะกล่าวว่าทางเดิน u-v เป็นทางเดินปิด (closed walk) เมื่อ u-v และจะเป็นทางเดินเปิด (open walk) เมื่อ $u \neq v$

บทนิยาม 1.9 เรากล่าวว่า u-v เป็นทางเดินไม่ซ้ำ (trail) เมื่อเส้นในทางเดิน u-v ไม่ซ้ำกัน

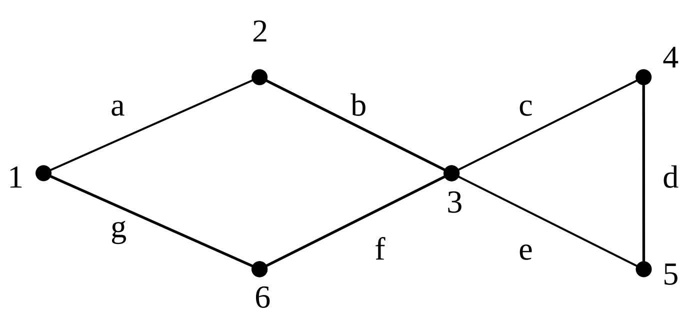
บทนิยาม 1.10 เรากล่าวว่า u-v เป็นวิถี (path) เมื่อเป็นทางเดินไม่ซ้ำ และไม่มีจุดซ้ำ และเขียนแทนวิถีที่มีจำนวนจุดเป็น n ด้วย P_n



ภาพที่ 7 วิถีที่มีจำนวนจุดเป็น 1 ถึง 6

บทนิยาม 1.11 เรียกทางเดินไม่ซ้ำปิดที่ไม่ใช่ทางเดินโดดเดี่ยวว่า วง (circuit) และเรียก วง ที่มีจุดเริ่มต้นและจุดภายในไม่ซ้ำกันว่า วัฏจักร (cycle)

ตัวอย่าง 1.7 จากกราฟในภาพ 2.2.2



ภาพที่ 8 ทางเดิน

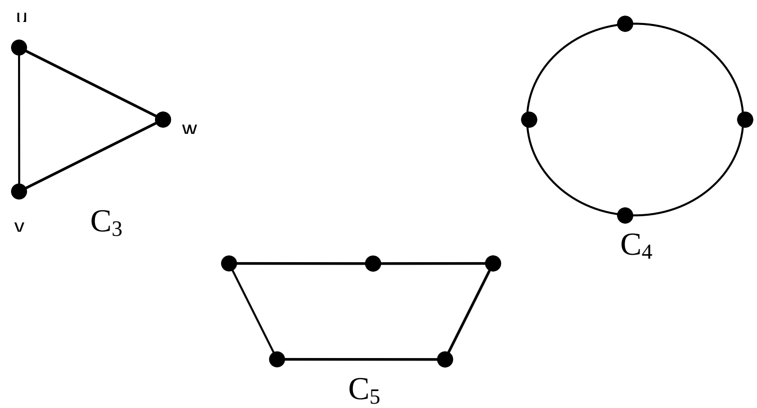
ลำดับ 1,a,2,b,3 f,6,f,3,c4,d,5 เป็นทางเดิน 1-5 ซึ่งมีความยาวเท่ากับ 6

ทางเดิน <1,a,2,b,3,c,4,d,5,e,3,f,6> เป็นทางเดินไม่ซ้ำ ซึ่งมีความยาว 6

ทางเดิน <1,a,2b,3,f,6> เป็นวิถี ซึ่งมีความยาว 3

บทนิยาม 1.12 เรียกวัฏจักรที่มีความยาวเป็นคู่ว่า วัฏจักรคู่ (even cycle) และเรียกวัฏจักรที่มีความยาวเป็นคี่ว่า วัฏจักรคี่ (odd cycle) เขียนแทนวัฏจักรที่มีจำนวนจุดเป็น n ด้วย C_n

ตัวอย่าง 1.8 กราฟวัฏจักร



ภาพที่ 9 วัฏจักรคู่และวัฏจักรคี่

บทนิยาม 1.13 ให้ G = (V,E) เป็นกราฟใดๆ และ $\varnothing \neq V' \subseteq V(G)$ เรียกสับกราฟ G' ของ G ว่าเป็น " อินดิวซ์สับกราฟ (Induced Subgraph) ของ G ที่เกิดจาก V' " เมื่อสับกราฟ G'ของ G มีเซตของจุดเท่ากับ V' และ เซตของเส้นเท่ากับเซตของเส้นใน G ที่จุดปลายทั้ง 2 ของเส้นแต่ละเส้นเป็นจุดใน V' เขียนแทนด้วย $G[V']$

ตัวอย่าง 1.9 จากกราฟ G ที่กำหนดให้ จงวาดกราฟของ G [{x,y,z,u}]

ภาพที่ 10 กราฟ G และ G [{x,y,z,u}]

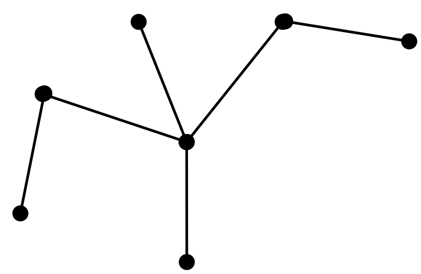
บทนิยาม 1.14 ให้ u และ v เป็นจุดใดๆ ในกราฟ G เรากล่าวว่า u และ v เชื่อมโยงกันได้ (connect) เมื่อมีวิถี u-v และกล่าวว่ากราฟ G เป็นกราฟเชื่อมโยง (connected graphs) เมื่อจุดสองจุดใดๆใน G เชื่อมโยงกันได้

ตัวอย่าง 1.10 ตัวอย่างของกราฟเชื่อมโยง (connected graphs)

ภาพที่ 11 กราฟเชื่อมโยง และกราฟไม่เชื่อมโยง

บทนิยาม 1.15 จะเรียก G ว่าเป็นกราฟโดดเดี่ยว (trivial graph) ก็ต่อเมื่อ E(G) = ϕ แต่ V(G) $\neq \phi$ เขียนแทนกราฟโดดเดี่ยวที่มี n จุดด้วย $\overline{K}_n$

บทนิยาม 1.16 G เป็นกราฟต้นไม้ (tree) เมื่อ G เป็นกราฟเชื่อมโยงและไม่มีวัฏจักร



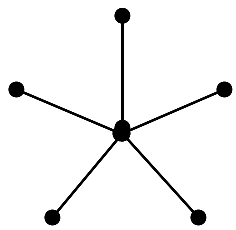
ภาพที่ 12 กราฟต้นไม้

สมบัติของกราฟต้นไม้

1. G เป็นกราฟต้นไม้ก็ต่อเมื่อ G เป็นกราฟเชื่อมโยงและ e(G) = n(G)-1
2. ถ้า G เป็นกราฟต้นไม้แล้ว G เป็นกราฟสองส่วน เนื่องจากว่ากราฟต้นไม้จะไม่มีทั้งวัฏจักรคู่และวัฏจักรคี่จึงทำให้เกิดเป็นกราฟสองส่วน

บทนิยาม 1.17 กราฟดาวที่มีจำนวนจุดเท่ากับ n คือ กราฟที่มี 1 จุด ที่มีดีกรี n-1 จุดที่เหลือมีดีกรีเท่ากับ 1

ตัวอย่าง 1.11 ตัวอย่างของกราฟดาว



ภาพที่ 13 กราฟดาว

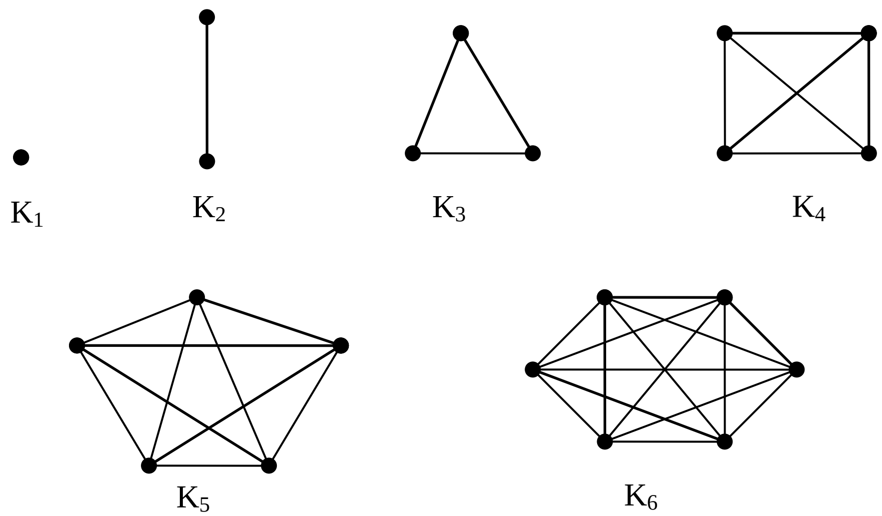
ข้อสังเกต กราฟดาว คือกราฟต้นไม้

บทนิยาม 1.18 ให้ G = (V,E) เป็นกราฟอย่างง่าย ถ้าเราสามารถแบ่งกั้น (partition) เซต V โดยที่ V = $V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup \ldots \cup V_k$ และ $V_i \cap V_j = \phi$ สำหรับ i ≠ j แล้วจะกล่าวว่า G เป็นกราฟ k ส่วน (k-partite graph) และเรียก $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ ว่าเป็นเซตแบ่งกั้นของ G ในกรณีที่ k = 2 จะเรียก กราฟ 2-พาร์ไท ว่า กราฟสองส่วน (bipartite graph)

บทนิยาม 1.19 ให้ G เป็นกราฟอย่างง่าย เรากล่าวว่า G เป็นกราฟบริบูรณ์ (complete graph)เมื่อจุด 2 จุดใดๆที่ต่างกันของ G เป็นจุดประชิดกัน เราจะเขียนแทนกราฟบริบูรณ์ที่มีจำนวนจุด n จุดด้วย K_n

ข้อสังเกต จำนวนด้านของกราฟบริบูรณ์ คือ $\dfrac{n(n-1)}{2}$ เมื่อ n คือจำนวนจุดของกราฟดังกล่าว

ตัวอย่าง 1.12 กราฟในภาพที่ 14 เป็นกราฟบริบูรณ์ที่มีจำนวนจุดเป็น 1,2,3,...,6 ตามลำดับ



ภาพที่ 14 กราฟบริบูรณ์ที่มีจำนวนจุดเป็น 1,2,3,...,6

บทนิยาม 1.20 เรากล่าวว่ากราฟอย่างง่าย G เป็นกราฟสองส่วนบริบูรณ์ (complete bipartite graph) เมื่อ G เป็นกราฟสองส่วนบริบูรณ์ที่มีเซตแบ่งกั้น (V_1,V_2) ซึ่งมีคุณสมบัติว่า ถ้า $u \in V_i$ และ $v \in V_j$ โดยที่ $i \neq j$ แล้ว $uv \in E(G)$

ตัวอย่าง 1.13 กราฟสองส่วนบริบูรณ์

ภาพที่ 15 กราฟสองส่วนบริบูรณ์

2. จำนวนจับคู่ และจำนวนเส้นปกคลุม

บทนิยาม 2.1 เซตย่อยของ $E(G)$ เรียกว่า “ จับคู่หรือเซตเส้นอิสระ (matching or independent edge set) M ” ของ G เมื่อไม่มีสองเส้นใดๆที่ต่างกันใน M มีจุดร่วมกัน

และ M เป็นการจับคู่ใหญ่สุด G เมื่อไม่มีการจับคู่ M' ของ G ที่ทำให้ $|M'| > |M|$

สำหรับการจับคู่ ที่มีจำนวนเส้นมากที่สุด เรียกจำนวนเส้นมากที่สุดนั้นว่า "*จำนวนจับคู่* (*matching number*)" ของ G เขียนแทนด้วย $\alpha'(G)$

บทนิยาม 2.2 เส้นในกราฟ G ปกคลุม (cover) สองจุดที่ตกกระทบกับเส้นนั้น และเส้นปกคลุมในกราฟ G คือเซตของเส้นในกราฟ G ที่ปกคลุมทุกจุดในกราฟ G

สำหรับเซตเส้นปกคลุมของ G ที่มีจำนวนเส้นน้อยที่สุด เรียกจำนวนเส้นน้อยที่สุดนั้นว่า "*จำนวนเส้นปกคลุม* (*edge covering number*)" ของ G เขียนแทนด้วย $\beta'(G)$

3. ผลคูณโครเน็คเกอร์ (Kronecker Products)

บทนิยาม 3.1 ให้ G_1 และ G_2 เป็นกราฟอย่าง*ง่าย ผลคูณโครเน็คเกอร์ (Kronecker Products)* ของ G_1 และ G_2 เขียนแทนด้วย $G_1 \otimes G_2$ คือกราฟที่มีเซตของจุดคือ $V(G_1 \otimes G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$ และเซตของเส้นคือ $E(G_1 \otimes G_2) = \{(u_1, v_1)(u_2, v_2) / u_1u_2 \in E(G_1)$ และ $v_1v_2 \in E(G_2)\}$

ทฤษฎีบท 3.1 ให้ $H = G_1 \otimes G_2$ จะได้ว่า

1) $|V(H)| = |V(G_1)||V(G_2)|$
2) $|E(H)| = 2|E(G_1)||E(G_2)|$
3) สำหรับ $(u,v) \in V(H)$, $d_H(u,v) = d_{G_1}(u)\, d_{G_2}(v)$

ทฤษฎีบท 3.2 ให้ G_1 และ G_2 เป็นกราฟต่อเนื่อง กราฟ $H = G_1 \otimes G_2$ เป็นกราฟต่อเนื่องก็ต่อเมื่อ G_1 หรือ G_2 มีวัฏจักรคี่

ทฤษฎีบท 3.3 ให้ G_1 และ G_2 เป็นกราฟต่อเนื่อง ที่ไม่มีวัฏจักรคี่ จะได้ว่า $H = G_1 \otimes G_2$ ประกอบด้วยสองคอมโพแนนท์ที่เป็นกราฟต่อเนื่อง

ทฤษฎีบท 3.4 ให้ G เป็นกราฟต่อเนื่องอันดับ m กราฟของ $K_{m,n} \otimes G$ คือ

$$\bigcup_{i=1}^{m} H_i \,; \quad H_i = \bigcup_{j=m+1}^{m+n} H_{ij}$$

เมื่อ $V(H_{ij}) = W_i \cup W_j$, $W_i = \{(i,1),(i,2),\ldots,(i,m)\}$, $W_j = \{(j,1),(j,2),\ldots,(j,m)\}$; $i < j$,
$E(H_{ij}) = \{(i,u)(j,v) / uv \in E(G)\}$

และถ้า G ไม่มีวัฏจักรคี่ แล้วจะได้ว่าแต่ละ H_{ij} จะประกอบด้วยสองคอมโพแนนท์ต่อเนื่องที่สมสัณฐานกับกราฟ G

4. ผลคูณมอดูลาร์ (Modular Products)

บทนิยาม 4.1 ให้ G_1 และ G_2 เป็นกราฟอย่างง่าย *ผลคูณมอดูลาร์ (Modular Products)* ของ G_1 และ G_2 เขียนแทนด้วย $G_1 \Diamond G_2$ คือ กราฟที่มีเซตของจุด คือ $V(G_1 \Diamond G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$ และ เซตของเส้น คือ
$E(G_1 \Diamond G_2) = \{(u_1, v_1)(u_2, v_2) \mid [u_1u_2 \in E(G_1) \text{ and } v_1v_2 \in E(G_2)] \cup [u_1u_2 \notin E(G_1) \text{ and } v_1v_2 \notin E(G_2)]\}$

ทฤษฎีบท 4.1 ให้ $H = G_1 \Diamond G_2$ จะได้ว่า

1) $|V(H)| = |V(G_1)||V(G_2)|$
2) $|E(H)| = 2|E(G_1)||E(G_2)| + 2|V(G_1^c)||E(G_2^c)|$
3) สำหรับ $(u,v) \in V(H)$, $d_H((u,v)) = d_{G_1}(v)d_{G_2}(v) + d_{G_1^c}(v) + d_{G_2^c}(v).$

ทฤษฎีบท 4.2 ให้ K_n, G เป็นกราฟบริบูรณ์ และกราฟอย่างง่าย ตามลำดับ จะได้ว่า

$$K_n \Diamond G = K_n \otimes G$$

ทฤษฎีบท 4.3 ให้ G_1, G_2 เป็นกราฟอย่างง่าย จะได้ว่า $G_1 \Diamond G_2 = (G_1 \otimes G_2) \cup (G_1^c \otimes G_2^c)$ เมื่อ G_i^c เป็นกราฟเติมเต็มของ $G_i, i = 1, 2$

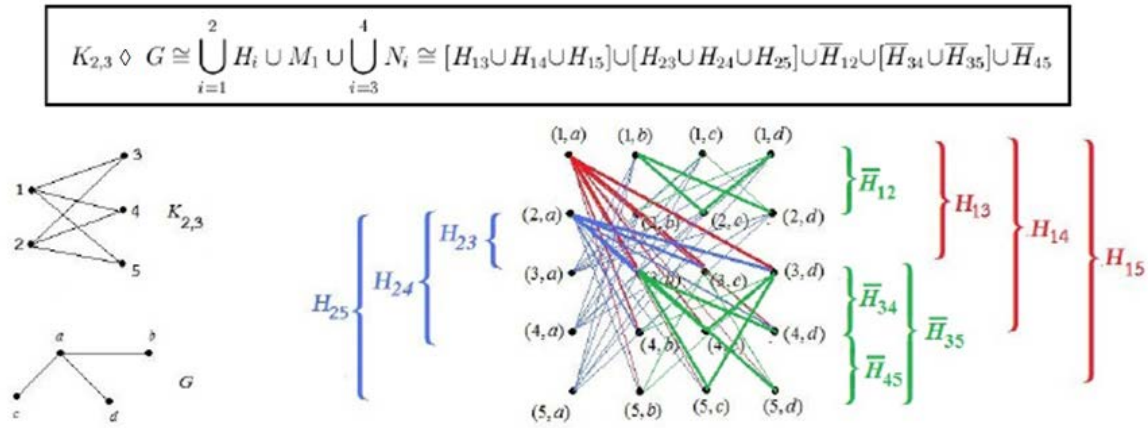
ทฤษฎีบท 4.4 ให้ G เป็นกราฟต่อเนื่องอันดับ p กราฟของ

$$K_{m,n} \Diamond G \cong \bigcup_{i=1}^{m} H_i \cup \bigcup_{i=1}^{m-1} M_i \cup \bigcup_{i=m+1}^{m+n-1} N_i$$

โดยที่ $H_i = \bigcup_{j=m+1}^{m+n} H_{ij}$, $M_i = \bigcup_{j=i+1}^{m} \bar{H}_{ij}$, $N_i = \bigcup_{j=i+1}^{m+n} \bar{H}_{ij}$ เมื่อ $V(H_{ij}) = V(\bar{H}_{ij}) = S_i \cup S_j$
$S_i = \{(u_i, v_1), (u_i, v_2), \ldots, (u_i, v_p)\}$, $i < j$; $E(H_{ij}) = \{(u_i, v)(u_j, w) / vw \in E(G)\}$;
$E(\bar{H}_{ij}) = \{(u_i, v)(u_j, w) / vw \notin E(G)\}$; $E(R_i) = \{(u_i, v)(u_i, w) / vw \in E(G)\}$;

ยิ่งไปกว่านั้นถ้า G ไม่มีวัฏจักรคี่ แล้วจะได้ว่าแต่ละ H_{ij} และ $\bar{H}_{ij}$ จะประกอบด้วยสองคอมโพแนนท์ต่อเนื่องที่สมสัณฐานกับกราฟ G และ G^c ตามลำดับ

ตัวอย่าง 4.1 แสดงกราฟของ $K_{2,3} \Diamond G$



ภาพที่ 16 กราฟของ $K_{2,3}\Diamond G$

5. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในปี 1968 G. Chartrand, D.P. Geller และ S. Hedetniemi ศึกษา A generalization of the chromatic number. และในปี 1985 J.A. Andrews และ M.S. Jacobson ก็ศึกษา On a generalization of chromatic number. และ On a generalization of chromatic number and two kinds of ramsey numbers.

ในปี 1987 Peter Dankelmann, Dieter Rautenbach, Lutz Volkmann ศึกษา Some parameters of graph and its complement.

ในปี 1989 D. Bergstrand, F. Harary, K. Hodges, G. Jennings, L. Kuklinski และ J. Wiener ร่วมกันศึกษา The sum numbering of a complete graphs. และอีก 3 ปีต่อมา

N. Hartseld และ W. F. Smyth ศึกษาเรื่อง The sum number of complete bipartite graphs, in graphs and matrices (ed. R. Rees).

ในปี 1991 Mustapha Chellali และ Lutz Volkmann ศึกษา Relations between parameters of a graph.

ในปี 1999 Shaoji Xu ศึกษา On independent domination number of regular graphs. และ C. D. Wallace ศึกษา Mod sum numbers of complete bipartite graphs. และ M. Sonntag, H. M. Teichert ศึกษา The sum number of d-partite complete hypergraphs. และอีก 2 ปีถัดมาศึกษา On the sum number and integral sum number of hypertrees and complete hypergraphs. ขณะที่ M. Sutton and M. Miller ศึกษา On the sum number of wheels. และ Y. Wang and B. Liu ศึกษา The sum number and integral sum number of complete bipartite graphs.

ในปี 2003 V. Seanpholphat, G. Chartrand, T. Thomas and P. Zhang ร่วมกันศึกษา On the hamiltonian number of a graph, The independent resolving number of a graph. และอีก 2 ปีต่อมาศึกษา Graphs with prescribed order and hamiltonian number.

ในปี 2004 A. J. W. Hilton, P. D. Johnson Jr. ศึกษา Relations between the lower domination parameters and the chromatic number of a graph. ขณะที่ D. Liu ศึกษา Radio number for trees. และอีก 4 ปีต่อมาศึกษาเรื่อง Radio number for square of cycles.

ตั้งแต่ปี 2002 จนถึงปัจจุบัน N. Punnim ศึกษากราฟพารามิเตอร์อีกมากมายหลายพารามิเตอร์ โดยมีบางงานวิจัยศึกษาร่วมกับนักวิจัยคนอื่นๆด้วย เช่น S. Bau, J. Akiyama, S. Thaithae,

V. Seanpholphat, A. Chantasartrassmee เป็นต้น ดังผลงานวิจัยต่อไปนี้

Regular graphs with maximum forest number, The forest number of (n , m)-graphs, Decycling regular graphs, Interpolation theorems in jump graphs, Realizations and interpolation theorems for graph parameters, Almost hamiltonian cubic graphs, Regular graphs and their chromatic numbers, The hamiltonian number of cubic graphs, Almost hamiltonian cubic graphs, Degree sequences and chromatic numbers of graphs, The clique numbers of regular graphs, Regular graphs and their chromatic numbers, Spectrum of graph parameters, Interpolation theorems on graph parameters, The matching number of regular graphs, Decycling regular graphs, The decycling number of cubic graphs. และ The graph of realizations and chromatic numbers. เป็นต้น

สำหรับงานวิจัยที่ศึกษากราฟพารามิเตอร์บนผลคูณคาร์ทีเชียนมีมากมายดังเช่นในช่วงปี 1980-1995 นักวิจัยหลายท่าน เช่น L.W. Beineke, R.D. Ringeisen, K. Asano, A.M. Dean และ

R.B. Richter ได้ศึกษา Crossing number บนผลคูณคาร์ทีเชียนของกราฟลักษณะเฉพาะต่างๆ

ในปี 1995 และ 1997 S. Gravier และ A. Khelladi ศึกษา Domination number และ Hamiltonian number ของกราฟ Hamiltonian สองกราฟ

ในปี 1998 และ 1999 J.M. Xu, W.S. Chiue และ B.S. Shieh ศึกษา Connectivity

ในปี 1999 R. Cherifi, S. Gravier, X. Lagraula, C.Payan และ I. Zighem ศึกษาDomination number โดยปี 2005 B. Bresar ได้ขยายผลศึกษา Upper domination

ในปี 2005 S. Klavzar ศึกษา New bounds and exact results on the independence number of cartesian product graphs.

ในปี 2008 S. Spacapan ศึกษา Connectivity of cartesian products of graphs.

และในปี 2006-2010 J.M. Xu และ C. Yang ร่วมกันศึกษา Connectivity และ super-connectivity of cartesian product graphs.

ส่วนสำหรับงานวิจัยที่ศึกษากราฟพารามิเตอร์บนผลคูณเข้ม (Strong product) และผลคูณเล็กซิโคกราฟิก ยังมีไม่มากนัก เช่น ในปี 2006 L. Sun และ J.M. Xu ศึกษา Connectivity บน strong product

ในปี 1998 S. Klavzar ศึกษา Fractional chromatic number บน lexicographic product

และในปี 2005 M. M. M. Jaradat และ M. Y. Alzoubi ร่วมกันศึกษา Upper bound of the basis number บน lexicographic product of graphs.

สำหรับงานวิจัยที่ศึกษากราฟพารามิเตอร์บนผลคูณโครเน็กเกอร์หรือผลคูณเท็นเซอร์หรือ

ผลคูณตรง ก็มีค่อนข้างมาก เช่นในปี 1999 A. Klobucar ศึกษา Domination numbers ของผลคูณของ P_6 และ P_n อีก 1 ปีต่อมาร่วมกับ N. Seifter ศึกษา k-dominating sets บนผลคูณของ paths

ในปี 2001 P. K. Jha ศึกษา Smallest independent dominating sets บนผลคูณของ cycles อีก 1 ปีต่อมาศึกษา Perfect r-domination บนผลคูณของ three cycles

ในปี 2005 C. Tardif ศึกษา Fractional chromatic number ขณะที่ D. F. Rall ศึกษา Total domination

ในปี 2006 P. Dorbec, S. Gravier, S. Klavzar และ S. Spacapan ขยายผลศึกษา Some results on total domination

ในปี 2008 A.Mamut และ E.Vumar ร่วมกันศึกษา Vertex vulnerability parameters

ในปี 2009 R. Guji และ E. Vumar ร่วมกันศึกษา Connectivity

และตั้งแต่ปี 2011 T. Sitthiwirattham ร่วมกับนักวิจัยหลายท่านศึกษา Independent number, Vertex covering number, Dominating number, Matching number, Edge Covering number และ Edge dominating number บนกราฟร่วม กราฟผลต่าง และผลคูณโครเน็กเกอร์บน Path, Cycle, Complete Graph, Complete Bipartite และ Wheel.

บทที่ 3
ระเบียบวิธีการวิจัย

การศึกษาวิจัยเรื่องกราฟพารามิเตอร์เชิงเส้น จำนวนจับคู่และจำนวนเส้นปกคลุม บนผลคูณมอดูลาร์ของกราฟอย่างง่าย ผู้วิจัยได้ดำเนินการวิจัยตามลำดับดังนี้

1. ค้นคว้าหาเอกสาร บทความวิจัยที่เกี่ยวข้อง
2. ศึกษาความรู้เกี่ยวกับนิยามและทฤษฎีบทต่างๆเกี่ยวกับผลคูณมอดูลาร์ จำนวนจับคู่ และจำนวน เส้นปกคลุม จากเอกสารที่เกี่ยวข้อง
3. ค้นคว้าหาเอกสาร ตำรา วารสาร และเอกสารสิ่งพิมพ์ที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยที่กำลังดำเนินการ วิจัยอยู่จากแหล่งข้อมูลต่างๆ
4. สร้างและพิสูจน์ทฤษฎีบทการหาจำนวนจับคู่ และจำนวนเส้นปกคลุม บนผลคูณมอดูลาร์ ของกราฟอย่างง่ายและกราฟสองส่วนบริบูรณ์
5. สรุปผล เตรียมเอกสารสำหรับการตีพิมพ์ ส่งตีพิมพ์ และเขียนรายงานการวิจัย

บทที่ 4
ผลการวิจัย

1. จำนวนจับคู่บนผลคูณเมอดูลาร์ของกราฟอย่างง่ายกับกราฟสองส่วนบริบูรณ์

บทตั้ง 1.1 ให้ $H_i=\bigcup_{j=m+1}^{m+n} H_{ij}$, $M_i=\bigcup_{j=i+1}^{m} \overline{H}_{ij}$, $N_i=\bigcup_{j=i+1}^{m+n} \overline{H}_{ij}$ แล้ว $\alpha'(H_{ij})=2\alpha'(G)$ และ $\alpha'\left(\overline{H}_{ij}\right)=2\alpha'\left(G^C\right)$

พิสูจน์ สมมุติให้ G ไม่มี odd cycle จะได้ว่า H_{ij} และ $\overline{H}_{ij}$ จะมี 2 คอมโพแนนท์ที่สมสัณฐานกับ G และ G^C ตามลำดับ

ถ้า G มี odd cycle จะได้ว่าสำหรับจุด $(u_i,v)\in S_i$ และ $(u_j,v)\in S_j$, $i<j$ จะมี $d_{H_{ij}}((u_i,v))=d_{H_{ij}}((u_j,v))=d_G(v)$ และ $d_{\overline{H}_{ij}}((u_i,v))=d_{\overline{H}_{ij}}((u_j,v))=d_{G^C}(v)$

ในการพิสูจน์เราจะแสดงเฉพาะกรณี H_{ij} สำหรับกรณี $\overline{H}_{ij}$ เราจะพิสูจน์ทำนองเดียวกัน

จากนิยามของ Kronecker product และ H_{ij} สำหรับทุกจุด $v,w\in G$ จะได้ว่าจุด $(u_i,v),(u_i,x)$ ไม่มีเส้นเชื่อมกัน และสำหรับจุด $(u_i,v),(u_i,x)\in H_{ij}$ จะมีเส้นเชื่อมกัน ก็ต่อเมื่อ $v,w\in G$ มีเส้นเชื่อมกัน

ต่อไปเราจะแสดงว่า $\alpha'(H_{ij})=2\alpha'(G)$

(1) เราจะแสดงว่า ถ้าจุด v,w เป็นอิสระกันใน G แล้วจุด (u_i,v), (u_j,w) จะจับคู่กันใน H_{ij} และ $(u_i,w),(u_j,v)$ จะจับคู่กันใน H_{ij}

จากที่กำหนดข้างต้น สำหรับทุกจุด $v,w\in G$ จะไม่มีเส้นเชื่อมระหว่างคู่จุด $(u_i,v),(u_i,w)$ และคู่จุด $(u_j,v),(u_j,w)$

ดังนั้นถ้าจุด v,w จับคู่กันใน G แล้วคู่จุด $(u_i,v),(u_j,w)$ จะจับคู่กันใน H_{ij} และคู่จุด $(u_j,v),(u_i,w)$ จะจับคู่กันใน H_{ij} เพราะเส้น $vw\in E(G)$ ดังนั้นเราได้ผลที่ต้องการ

(2) ต่อไปเราจะแสดงว่า ถ้า $v,w\in G$ ไม่ถูกจับคู่ใน G แล้วคู่จุด $(u_i,v),(u_j,w)$ จะไม่จับคู่กันใน H_{ij} และคู่จุด $(u_j,v),(u_i,w)$ จะไม่จับคู่กันใน H_{ij} เพราะว่า $v,w\in G$ ไม่ถูกจับคู่ใน G มีเพียงกรณีเดียว คือ $vw\notin E(G)$ ดังนั้นจะไม่มีเส้น เชื่อมระหว่างคู่จุด $(u_i,v),(u_j,w)$ ใน H_{ij} และคู่จุด $(u_j,v),(u_i,w)$ ใน H_{ij}

จะได้ว่า เซตจับคู่ใน G จะสมนัยกับสองเซตจับคู่ใน H_{ij}

ดังนั้น $\alpha'(H_{ij})=2\alpha'(G)$ และ $\alpha'\left(\overline{H}_{ij}\right)=2\alpha'\left(G^C\right)$ ❑

นิยาม 1.2 [Ore. 1962] ให้ M เป็นการจับคู่
M-*alternating path* คือวิถีซึ่งสลับระหว่างเส้นใน M และเส้นที่ไม่อยู่ใน M
M-*alternating path* ซึ่งจุดปลายไม่อยู่ใน M เรียกว่า M-*augmenting path*

ทฤษฎีบท 1.3 [Ore. 1962]
การจับคู่ M ใน G เรียกว่า การจับคู่ใหญ่สุด (maximum matching) ใน G
ก็ต่อเมื่อ G ไม่มี M-*alternating path*

ทฤษฎีบท 1.2 ให้ G เป็นกราฟเชื่อมโยงอันดับ p และไม่มี cut-vertex แล้ว

$\alpha'(K_{m,n}\lozenge G)=$

$$\begin{cases} 2n\alpha'(G)+|N^*|, & m=m,\ m=2k,\ k\in\square \\ 2n\alpha'(G)+|N^*|+\max\{|P^{**}|+|Q^*|\}, & m=m,\ m=2k-1,\ k\in\square \\ 2n\alpha'(G)+|N^*|+|P^{**}|+|Q^{**}|-|R^{**}|, & m<m,\ m=2k,\ n-m=2h,\ k,h\in\square \\ 2n\alpha'(G)+|N^*|+|P^{**}|+|Q^{**}|-|R^{**}|+|P_m|, & m<m,\ m=2k-1,\ n-m=2h-1,\ k,h\in\square \\ 2n\alpha'(G)+|N^*|+|P^{**}|+|Q^{**}|-|R^{**}|+|P_{m+n}|+|Q_{m+n}|-|R_{m+n}|, & m<m,\ m=2k,\ n-m=2h-1,\ k,h\in\square \\ 2n\alpha'(G)+|N^*|+|P^{**}|+|Q^{**}|-|R^{**}|+|P_{m+n}|+|Q_{m+n}|-|R_{m+n}|+|P^*_m|+|Q^*_m|-|R^*_m|, & \\ & m<m,\ m=2k-1,\ n-m=2h,\ k,h\in\square \end{cases}$$

สำหรับกรณี m>n ก็จะเหมือนกับกรณี m<n เมื่อ

เซตจับคู่ใหญ่สุดของ $K_{m,n}$ และ G คือ M_2

$N_i^*=\{(u_i,v_p)(u_{i+1},v_q)\mid v_p$ หรือ v_q เป็นจุดปลายของเส้นใน M_2, v_pv_q อยู่ในการจับคู่ใน $G^C\}$,

$$i\in\left\{1,3,\ldots,2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1\right\}\cup\left\{m+1,m+3,\ldots,m+2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1\right\}$$

$P_i^*=\{(u_i,v_p)(u_m,v_q)\mid v_pv_q\in E(G^C),\ q\neq 1,2,\ldots,k$ และ (u_i,v_q) ไม่ถูกจับคู่ในการจับคู่ใหญ่สุดของใน $M^*\cup N^*\}$, $i\in\{1,2,\ldots,m\}\cup\{m+1,m+2,\ldots,m+n-1\}$

$Q_i^*=\{(u_i,v_p)(u_{m+n},v_q)\mid v_pv_q\in E(G),\ q\neq 1,2,\ldots,k$ และ (u_i,v_q) ไม่ถูกจับคู่ในการจับคู่ใหญ่สุดของใน $M^*\cup N^*\}$, $i\in\{1,2,\ldots,m\}\cup\{m+1,m+2,\ldots,m+n-1\}$

$X_i=\{(u_j,x)\in V(K_{m,n}\lozenge G)\mid (u_j,x)$ ไม่ถูกจับคู่ในการจับคู่ใหญ่สุดใน $M^*\cup N^*$ และ $i-j=m-n\}$

$Y_i=\{(u_j,y)\in V(K_{m,n}\lozenge G)\mid (u_j,y)$ ไม่ถูกจับคู่ในการจับคู่ใหญ่สุดใน $M^*\cup N^*$ และ $i-j=n\}$

$P_i^{**}=\{(u_i,v)(u,x)\mid (u_i,v)\in X_i$ และ $(v,x)\in E(G^C)\}$ $\in{}_i$ $i\in\{2m+1,\ldots,m+n\}$

$Q_i^{**}=\{(u_i,v)(u,y)\mid (u_i,v)\in Y_i$ และ $(v,y)\in E(G)\}$ $\in Y_i$ $i\in\{2m+1,\ldots,m+n\}$

$R_i^{**}=\{(u_i,v)\in V_i \mid (u_i,v)$ ประชิดกับจุดใน $X_i\cap Y_i\}$, $i\in\{2m+1,...,m+n\}$

$P^{**}=\bigcup_{i=\{2m+1,...,m+n\}} P_i^{**}$, $\quad Q^{**}=\bigcup_{i=\{2m+1,...,m+n\}} Q_i^{**}$, $\quad R^{**}=\bigcup_{i=\{2m+1,...,m+n\}} R_i^{**}$

$\overline{X}_i=\{(u_i,x)\in V(K_{m,n}\Diamond G) \mid (u_j,x)$ ไม่ถูกจับคู่ในการจับคู่ใหญ่สุดใน $M^*\cup N^*\}$, $i=1,2,...,m-1$

$\overline{Y}_i=\{(u_i,y)\in V(K_{m,n}\Diamond G) \mid (u_j,y)$ ไม่ถูกจับคู่ในการจับคู่ใหญ่สุดใน $M^*\cup N^*$ และ $i\text{-}j=m\text{-}n\}$, $i=1,2,...,m-1$

$P_m=\{(u_m,v)(u_i,x) \mid (u_m,v)\in \overline{V}_m, vx\in E(G^C), (u_i,x)\in\bigcup_{i=1}^{m-1}\overline{X}_i$ ไม่เป็นจุดปลายของการจับคู่ของ $Q^{**}\}$

$P_{m+n}=\{(u_{m+n},v)(u,y) \mid v$ เป็นจุดปลายของการจับคู่ใหญ่สุดของ G^C, $vy\in E(G^C)$, $(u,y)\in\overline{Y}_i$ ไม่เป็นจุดปลายของการจับคู่ใหญ่สุดของ $P^{**}\}$, $i\in\{m+1,m+2,...,m+n\}$

$Q_{m+n}=\{(u_{m+n},v)(u,x) \mid v$ เป็นจุดปลายของการจับคู่ใหญ่สุดของ G^C, $vx\in E(G)$, $(u,x)\in\overline{X}_i$ ไม่เป็นจุดปลายของการจับคู่ใหญ่สุดของ $Q^{**}\}$, $i\in\{1,2,...,m\}$

$R_{m+n}=\{(u_{m+n},v)\in V_{m+n} \mid (u_{m+n},v)$ ประชิดกับจุดใน $X_i\cap Y_i\}$

$P_m^*=\{(u_m,v)(u_i,x) \mid (u_m v)\in\overline{V}_m^*$, $(u_i,x)\in\bigcup_{i=1}^{m-1}\overline{X}_i$ ไม่เป็นจุดปลายของการจับคู่ของ $Q^{**}\cap Q_{m+n}\}$

$Q_m^*=\{(u_m,v)(u_i,w) \mid (u_m v)\in\overline{V}_m^*$, (u_i,w) ไม่เป็นจุดปลายของการจับคู่ของ $P^{**}\cap P_{m+n}\}$

$R_m=\{(u_m,v)\in\overline{V}_m^* \mid (u_m,v)$ ประชิดกับจุดใน $\overline{X}_i\cap\overline{Y}_i\}$

พิสูจน์ ให้ $V(K_{m,n})=\{u_i \mid i=1,2,...,m+n\}$, $V(G)=\{v_i \mid i=1,2,...,p\}$,

$$S_i=\left\{(u_i,v_j)\in V(K_{m,n}\Diamond G) \,\middle|\, j=1,2,...,p\right\},\ i=1,2,...,m+n$$

จาก $\alpha'(K_{m,n})=\min\{m,n\}$ และ $\alpha'(G)=k$ สมมุติให้เซตจับคู่ใหญ่สุดของ $K_{m,n}$ และ G คือ

$$M_1=\begin{cases}\{u_1u_{m+1},u_1u_{m+2},...,u_mu_{2m}\}; & m\le n\\ \{u_1u_{m+1},u_1u_{m+2},...,u_nu_{m+n}\}; & m>n\end{cases}$$ และ M_2 ตามลำดับ

<u>**กรณี 1 : m=n**</u>

<u>**กรณี 1.1**</u> **: m,n เป็นจำนวนคู่**

จากบทตั้ง 1.1 เราได้ว่า $\alpha'(H_{ij})=2\alpha'(G)$

สมมุติให้ $M_i^*=\{(u_i,v_p)(u_{m+i},v_q) \mid v_p,v_q\in M_2\}$, $i=1,2,...,m$

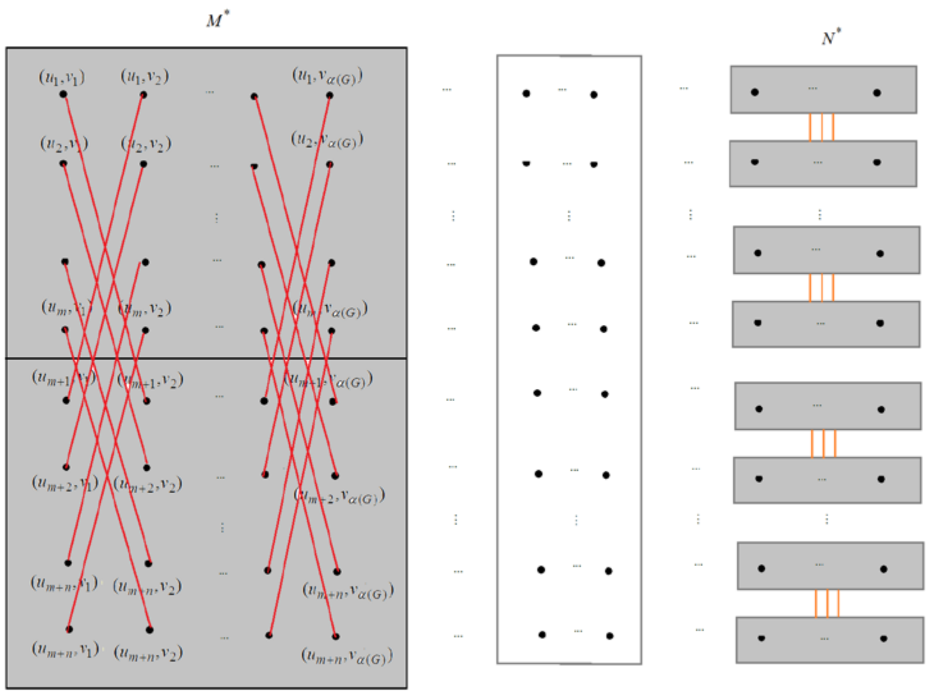
เราจะเห็นได้ว่า จุดใน $\bigcup_{i=1}^{m}M_i^*=M^*$ จะไม่ประชิดกับจุดใน $\bigcup_{i\in\left\{1,3,...,2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1\right\}\cup\left\{m+1,m+3,...,m+2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1\right\}} N_i^*=N^*$

ดังนั้น การจับคู่ใน $K_{m,n}\Diamond G$ คือ $M^*\cup$

นั่นคือ $\alpha'(K_{m,n}\Diamond G)\ge 2n\alpha'(G)+|N^*|$

สมมุติให้ $\alpha'(K_{m,n}\Diamond G)>2n\alpha'(G)+|N^*|$ จะได้ว่ามีอย่างน้อยสองจุด $(u_i,w_j),(u_j,w_i)\in K_{m,n}\Diamond G$ โดยที่ $(u_i,w_j),(u_j,w_i)\notin M^*\cup N^*$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้น $\alpha'(K_{m,n}\Diamond G)=2n\alpha'(G)+|N^*|$ เมื่อ m=n และ m,n เป็นจำนวนคู่



ภาพที่ 17 กรณี m=n และ m,n เป็นจำนวนคู่

<u>กรณี 1.2</u> : m,n เป็นจำนวนคี่

เรามีการจับคู่ $M^*\cup N^*$ และจากนิยามของการจับคู่ จะได้การจับคู่อื่นใน G คือเซต P_i^* และ Q_i^*

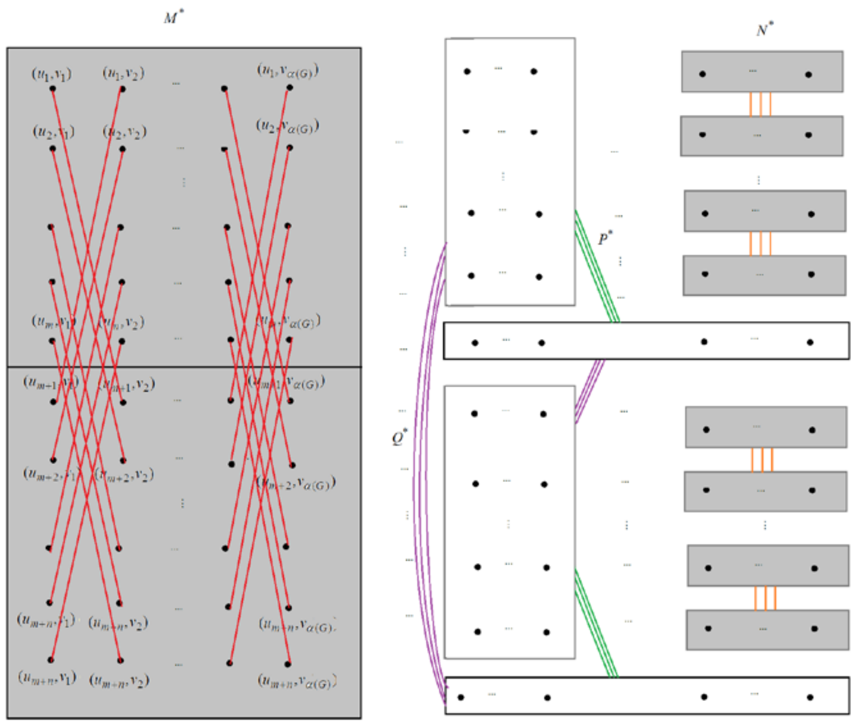
กำหนดให้ $P^*=$ และ$*=*$ $\bigcup\limits_{i=\{1,2,\ldots,m\}\cup\{m+1,m+2,\ldots,m+n-1\}} P_i^*$ $\quad Q \quad$ $\bigcup\limits_{i=\{1,2,\ldots,m\}\cup\{m+1,m+2,\ldots,m+n-1\}} Q_i$

ดังนั้น การจับคู่ใน $K_{m,n}\Diamond G$ คือ $M^*\cup N^*\cup\sup\{P^*,Q^*\}$

นั่นคือ $\alpha'(K_{m,n}\Diamond G)\geq 2n\alpha'(G)+|N^*|+\max\{|P^*|,|Q^*|\}$

สมมุติให้ $\alpha'(K_{m,n}\Diamond G)>2n\alpha'(G)+|N^*|+\max\{|P^*|,|Q^*|\}$ จะได้ว่ามีอย่างน้อยสองจุด $(u_i,w_j),(u_j,w_i)\in K_{m,n}\Diamond G$ โดยที่ $(u_i,w_j),(u_j,w_i)\notin M^*\cup N^*\cup\sup\{P^*,Q^*\}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้น $\alpha'(K_{m,n}\Diamond G)=2n\alpha'(G)+|N^*|+\max\{|P^*|,|Q^*|\}$ เมื่อ m=n และ m,n เป็นจำนวนคี่



ภาพที่ 18 กรณี m=n และ m,n เป็นจำนวนคี่

<u>**กรณี 2 : m=n**</u>

<u>**กรณี 2.1**</u> **: m เป็นจำนวนคู่ และ n-m เป็นจำนวนคี่**

ให้ $V_i = S_i - \{(u_i, v_p) \mid v$ เป็นจุดปลายของการจับคู่ใหญ่สุดใน $G^C\}$, $i=2m+1,\dots,m+n$,

เรามีการจับคู่ $M^* \cup N^*$

และจากนิยามของการจับคู่ จะได้การจับคู่อื่นใน G คือเซต P_i^{**}, Q_i^{**} และ R_i^{**}

ให้ $P^{**}=\bigcup_{i=\{2m+1,\dots,m+n\}}$ และ $P_i^{**}=,$ $Q^{**}=\bigcup_{i=\{2m+1,\dots,m+n\}} Q_i^{**}$ $R \bigcup_{i=\{2m+1,\dots,m+n\}} R_i$

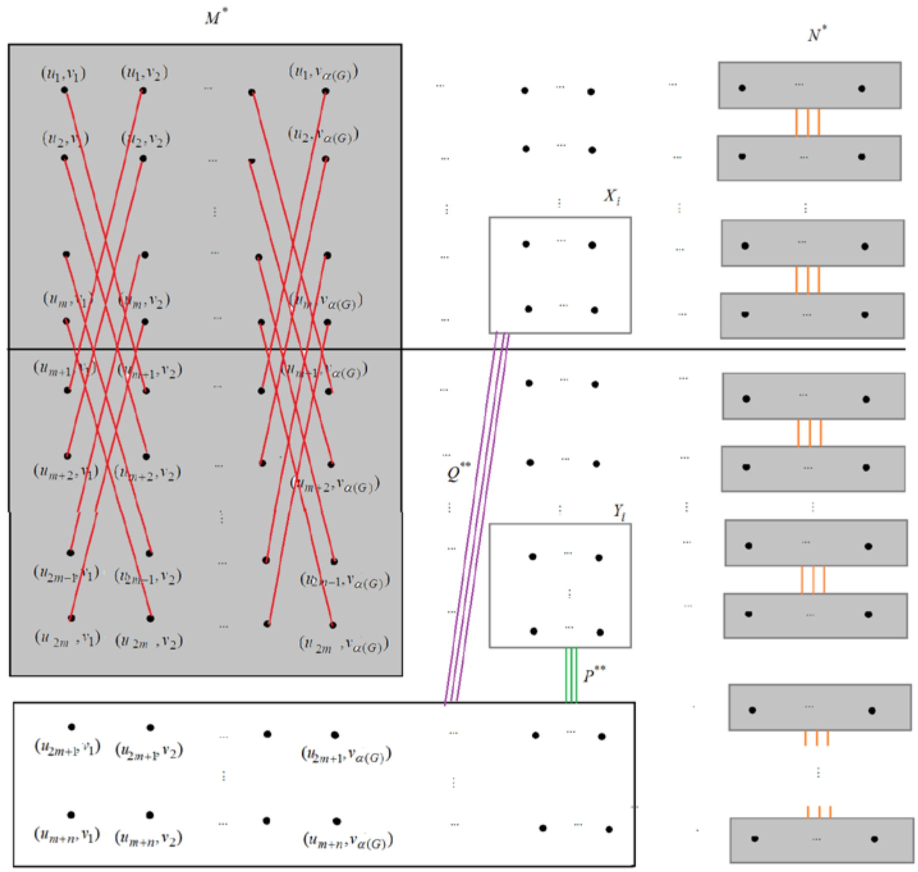
ดังนั้น การจับคู่ใน $K_{m,n} \Diamond G$ คือ $M^{*} \cup N^{*} \cup \left[\left(P \cup Q \right) - R \right]$

นั่นคือ $\alpha'(K_{m,n} \Diamond G) \geq 2n\alpha'(G) + |N^*| + |P^{**}| + |Q^{**}| - |R^{**}|$

สมมุติให้ $\alpha'(K_{m,n} \Diamond G) > 2n\alpha'(G) + |N^*| + |P^{**}| + |Q^{**}| - |R^{**}|$ จะได้ว่ามีอย่างน้อยสองจุด $(u_i,w_j),(u_j,w_i) \in K_{m,n} \Diamond G$ โดยที่ $(u_i,w_j),(u_j,w_i) \notin M^* \cup N^* \cup \left[\left(P^{**} \cup Q^{**} \right) - R^{**} \right]$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้น $\alpha'(K_{m,n} \Diamond G) = 2n\alpha'(G) + |N^*| + |P^{**}| + |Q^{**}| - |R^{**}|$

เมื่อ $m<n$, m เป็นจำนวนคู่ และ n-m เป็นจำนวนคี่



ภาพที่ 19 กรณี m<n, m เป็นจำนวนคู่ และ n-m เป็นจำนวนคู่

<u>กรณี 2.2</u> **: m เป็นจำนวนคี่ และ n-m เป็นจำนวนคี่**

ให้ $\overline{V}_m = S_m - \{(u_m,v) \mid v$ เป็นจุดปลายของการจับคู่ใหญ่สุดใน $G\}$,

เรามีการจับคู่ $M^* \cup N^* \cup \left[\left(P^{**} \cup Q^{**}\right) - R^{**}\right]$

และจากนิยามของการจับคู่ จะได้การจับคู่อื่นใน G คือเซต P_m

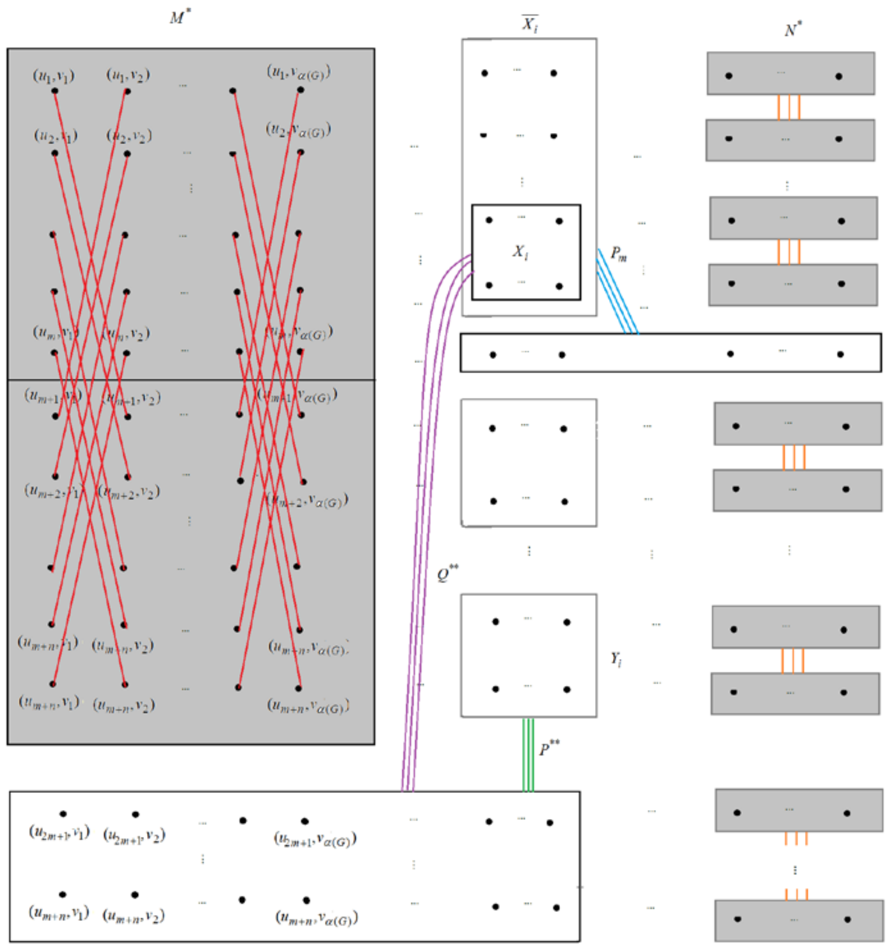
ดังนั้น การจับคู่ใน $K_{m,n} \Diamond G$ คือ $M^{*} \cup N^{*} \cup \left[\left(P \cup Q\right) - R\right] \cup P_m$

นั่นคือ $\alpha'(K_{m,n} \Diamond G) \ge 2n\alpha'(G) + |N^*| + |P^{**}| + |Q^{**}| - |R^{**}| + |P_m|$

สมมุติให้ $\alpha'(K_{m,n} \Diamond G) > 2n\alpha'(G) + |N^*| + |P^{**}| + |Q^{**}| - |R^{**}| + |P_m|$ จะได้ว่ามีอย่างน้อยสองจุด $(u_i,w_j),(u_j,w_i) \in K_{m,n} \Diamond G$ โดยที่ $(u_i,w_j),(u_j,w_i) \notin M^* \cup N^* \cup \left[\left(P^{**} \cup Q^{**}\right) - R^{**}\right] \cup P_m$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้น $\alpha'(K_{m,n} \Diamond G) = 2n\alpha'(G) + |N^*| + |P^{**}| + |Q^{**}| - |R^{**}| + |P_m|$

เมื่อ m<n, m เป็นจำนวนคี่ และ n-m เป็นจำนวนคี่



ภาพที่ 20 กรณี m<n , m เป็นจำนวนคี่ และ n-m เป็นจำนวนคี่

<u>กรณี 2.3</u> : m เป็นจำนวนคู่ และ n-m เป็นจำนวนคี่

เรามีการจับคู่ $M^* \cup N^* \cup \left[\left(P^{**} \cup Q^{**}\right) - R^{**}\right]$

และจากนิยามของการจับคู่ จะได้การจับคู่อื่นใน G คือเซต P_{m+n}, Q_{m+n} และ R_{m+n}

ดังนั้น การจับคู่ใน $K_{m,n} \Diamond G$ คือ

$$M^* \cup N^* \cup \left[\left(P^{**} \cup Q^{**}\right) - R^{**}\right] \cup \left[\left(P_{m+n} \cup R_{m+n}\right) - R_{m+n}\right]$$

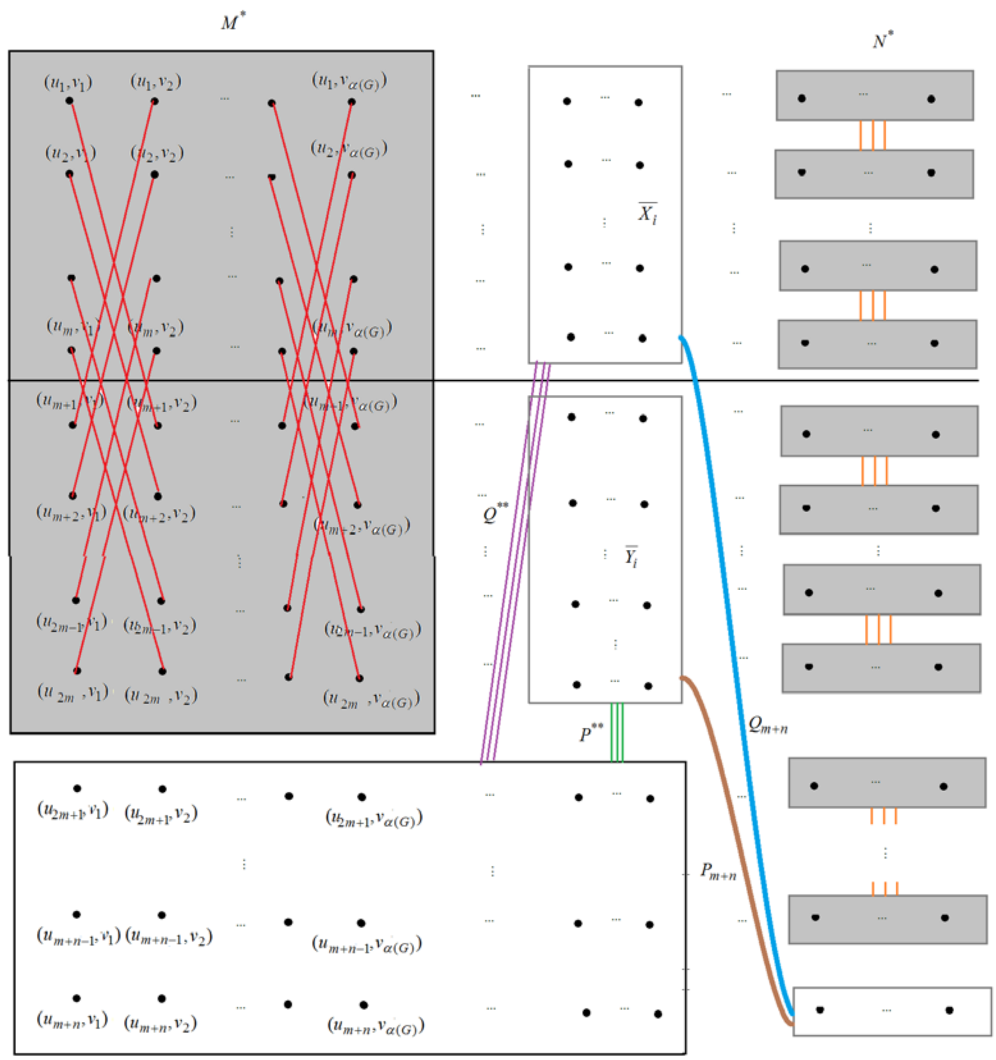
นั่นคือ $\alpha'(K_{m,n} \Diamond G) \geq 2n\alpha'(G) + |N^*| + |P^{**}| + |Q^{**}| - |R^{**}| + |P_{m+n}| + |Q_{m+n}| - |R_{m+n}|$

สมมุติให้ $\alpha'(K_{m,n} \Diamond G) > 2n\alpha'(G) + |N^*| + |P^{**}| + |Q^{**}| - |R^{**}| + |P_{m+n}| + |Q_{m+n}| - |R_{m+n}|$ จะได้ว่ามีอย่างน้อยสองจุด $(u_i,w_j),(u_j,w_i) \in K_{m,n} \Diamond G$ โดยที่

$(u_i,w_j),(u_j,w_i) \notin M^* \cup N^* \cup \left[\left(P^{**} \cup Q^{**}\right) - R^{**}\right] \cup \left[\left(P_{m+n} \cup R_{m+n}\right) - R_{m+n}\right]$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้น $\alpha'(K_{m,n}\lozenge G) = 2n\alpha'(G) + |N^*| + |P^{**}| + |Q^{**}| - |R^{**}| + |P_{m+n}| + |Q_{m+n}| - |R_{m+n}|$

เมื่อ m<n , m เป็นจำนวนคู่ และ n-m เป็นจำนวนคี่



ภาพที่ 21 กรณี m<n , m เป็นจำนวนคู่ และ n-m เป็นจำนวนคี่

<u>กรณี 2.4</u> : m เป็นจำนวนคี่ และ n-m เป็นจำนวนคู่

ให้ $\overline{V}_m^* = \{(u_m, v) \mid v$ เป็นจุดปลายของการจับคู่ใหญ่สุดใน $G^*\}$,

เรามีการจับคู่ $\left[\left(P^{**} \cup Q^{**}\right) - R^{**}\right] \cup \left[\left(P_{m+n} \cup R_{m+n}\right) - R_{m+n}\right]$

และจากนิยามของการจับคู่ จะได้การจับคู่อื่นใน G คือเซต P_m^*, Q_m^* และ R_m

ดังนั้น การจับคู่ใน $K_{m,n}\lozenge G$ คือ

$$M^* \cup N^* \cup \left[\left(P^{**} \cup Q^{**}\right) - R^{**}\right] \cup \left[\left(P_{m+n} \cup R_{m+n}\right) - R_{m+n}\right] \cup \left[\left(P_m^* \cup R_m^*\right) - R_m\right]$$

นั่นคือ $\alpha'(K_{m,n}\lozenge G)\geq 2n\alpha'(G)+|N^*|+|P^{**}|+|Q^{**}|-|R^{**}|+|P_{m+n}|+|Q_{m+n}|-|R_{m+n}|$
$+|P_m^*|+|Q_m^*|-|R_m|$

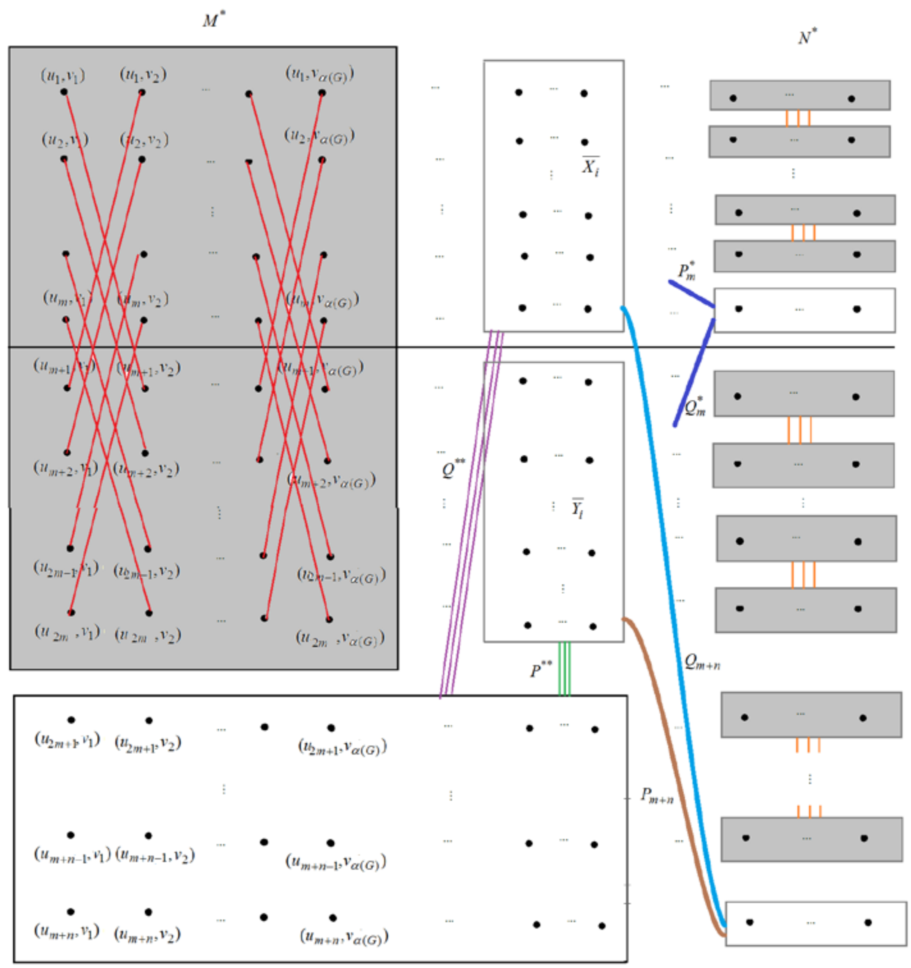
สมมุติให้ $\alpha'(K_{m,n}\lozenge G)>2n\alpha'(G)+|N^*|+|P^{**}|+|Q^{**}|-|R^{**}|+|P_{m+n}|+|Q_{m+n}|-|R_{m+n}|$
$+|P_m^*|+|Q_m^*|-|R_m|$

จะได้ว่ามีอย่างน้อยสองจุด $(u_i,w_j),(u_j,w_i)\in K_{m,n}\lozenge G$ โดยที่

$(u_i,w_j),(u_j,w_i)\notin M^*\cup N^*\cup\left[\left(P^{**}\cup Q^{**}\right)-R^{**}\right]\cup\left[\left(P_{m+n}\cup R_{m+n}\right)-R_{m+n}\right]\cup$
$\left[\left(P_m^*\cup R_m^*\right)-R_m\right]$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้น $\alpha'(K_{m,n}\lozenge G)=2n\alpha'(G)+|N^*|+|P^{**}|+|Q^{**}|-|R^{**}|+|P_{m+n}|+|Q_{m+n}|-|R_{m+n}|$
$+|P_m^*|+|Q_m^*|-|R_m|$

เมื่อ m<n , m เป็นจำนวนคี่ และ n-m เป็นจำนวนคู่ ❑



ภาพที่ 22 กรณี m<n , m เป็นจำนวนคี่ และ n-m เป็นจำนวนคู่

2. จำนวนเส้นปกคลุมบนผลคูณมอดูลาร์ของกราฟอย่างง่ายและกราฟสองส่วนบริบูรณ์

บทตั้ง 2.1 [Douglus, B.W. 2011]
ให้ G เป็นกราฟอย่างง่ายอันดับ n จะได้ว่า $\alpha'(G)+\beta'(G)=n$

ทฤษฎีบท 1.2 ให้ G เป็นกราฟเชื่อมโยงอันดับ p และไม่มี cut-vertex แล้ว

$\beta'(K_{m,n}\Diamond G)=$

$$\begin{cases} (m+n)p-2n\alpha'(G)-|N^*|, & m=m,\ m=2k,\ k\in\square \\ (m+n)p-2n\alpha'(G)-|N^*|-\max\{|P^{**}|+|Q^*|\}, & m=m,\ m=2k-1,\ k\in\square \\ (m+n)p-2n\alpha'(G)-|N^*|-|P^{**}|-|Q^{**}|+|R^{**}|, & m<m,\ m=2k,\ n-m=2h,\ k,h\in\square \\ (m+n)p-2n\alpha'(G)-|N^*|-|P^{**}|-|Q^{**}|+|R^{**}|-|P_m|, & m<m,\ m=2k-1,\ n-m=2h-1,\ k,h\in\square \\ (m+n)p-2n\alpha'(G)-|N^*|-|P^{**}|-|Q^{**}|+|R^{**}|-|P_{m+n}|-|Q_{m+n}|+|R_{m+n}|, & m<m,\ m=2k,\ n-m=2h-1,\ k,h\in\square \\ (m+n)p-2n\alpha'(G)-|N^*|-|P^{**}|-|Q^{**}|+|R^{**}|-|P_{m+n}|-|Q_{m+n}|+|R_{m+n}|-|P_m^*|-|Q_m^*|+|R_m^*|, & \\ & m<m,\ m=2k-1,\ n-m=2h,\ k,h\in\square \end{cases}$$

สำหรับกรณี m>n ก็จะเหมือนกับกรณี m<n

พิสูจน์ โดยบทตั้ง 2.1 และทฤษฎีบท 1.2 ❑

บทที่ 5
สรุปผลและข้อเสนอแนะ

1. สรุปผล

จากงานวิจัยนี้ เราได้สูตรทั่วไปในการหากราฟพารามิเตอร์เชิงเส้น 2 ตัวคือ จำนวนจับคู่บนผลคูณมอดูลาร์ของกราฟอย่างง่ายและกราฟสองส่วนบริบูรณ์

$\alpha'(K_{m,n}\lozenge G)=$

$$\begin{cases} 2n\alpha'(G)+|N^*|, & m=m,\ m=2k,\ k\in\square \\ 2n\alpha'(G)+|N^*|+\max\{|P^{**}|+|Q^*|\}, & m=m,\ m=2k-1,\ k\in\square \\ 2n\alpha'(G)+|N^*|+|P^{**}|+|Q^{**}|-|R^{**}|, & m<m,\ m=2k,\ n-m=2h,\ k,h\in\square \\ 2n\alpha'(G)+|N^*|+|P^{**}|+|Q^{**}|-|R^{**}|+|P_m|, & m<m,\ m=2k-1,\ n-m=2h-1,\ k,h\in\square \\ 2n\alpha'(G)+|N^*|+|P^{**}|+|Q^{**}|-|R^{**}|+|P_{m+n}|+|Q_{m+n}|-|R_{m+n}|, & m<m,\ m=2k,\ n-m=2h-1,\ k,h\in\square \\ 2n\alpha'(G)+|N^*|+|P^{**}|+|Q^{**}|-|R^{**}|+|P_{m+n}|+|Q_{m+n}|-|R_{m+n}|+|P^*_m|+|Q^*_m|-|R^*_m|, & \\ & m<m,\ m=2k-1,\ n-m=2h,\ k,h\in\square \end{cases}$$

และจำนวนเส้นปกคลุมบนผลคูณมอดูลาร์ของกราฟอย่างง่ายและกราฟสองส่วนบริบูรณ์

$\beta'(K_{m,n}\lozenge G)=$

$$\begin{cases} (m+n)p-2n\alpha'(G)-|N^*|, & m=m,\ m=2k,\ k\in\square \\ (m+n)p-2n\alpha'(G)-|N^*|-\max\{|P^{**}|+|Q^*|\}, & m=m,\ m=2k-1,\ k\in\square \\ (m+n)p-2n\alpha'(G)-|N^*|-|P^{**}|-|Q^{**}|+|R^{**}|, & m<m,\ m=2k,\ n-m=2h,\ k,h\in\square \\ (m+n)p-2n\alpha'(G)-|N^*|-|P^{**}|-|Q^{**}|+|R^{**}|-|P_m|, & m<m,\ m=2k-1,\ n-m=2h-1,\ k,h\in\square \\ (m+n)p-2n\alpha'(G)-|N^*|-|P^{**}|-|Q^{**}|+|R^{**}|-|P_{m+n}|-|Q_{m+n}|+|R_{m+n}|, & m<m,\ m=2k,\ n-m=2h-1,\ k,h\in\square \\ (m+n)p-2n\alpha'(G)-|N^*|-|P^{**}|-|Q^{**}|+|R^{**}|-|P_{m+n}|-|Q_{m+n}|+|R_{m+n}|-|P^*_m|-|Q^*_m|+|R^*_m|, & \\ & m<m,\ m=2k-1,\ n-m=2h,\ k,h\in\square \end{cases}$$

สำหรับกรณี m>n ก็จะเหมือนกับกรณี m<n

2. ข้อเสนอแนะ

จากการทำการวิจัยเรื่องกราฟพารามิเตอร์เชิงเส้นบนผลคูณมอดูลาร์ของกราฟอย่างง่ายและกราฟสองส่วนบริบูรณ์ ได้ข้อคิดเห็นและข้อเสนอแนะดังนี้

1. งานวิจัยนี้สามารถนำไปใช้เป็นแนวทางในการหาค่ากราฟพารามิเตอร์เชิงเส้นอื่นๆ
2. ในงานวิจัยนี้สามารถนำไปใช้เป็นแนวทางแก้ปัญหากับกราฟลักษณะเฉพาะอื่นๆได้
3. เมื่อได้ศึกษาทฤษฎีบทต่างๆ ในงานวิจัยนี้แล้วอาจจะศึกษาต่อไปในการประยุกต์อื่นๆต่อไป

บรรณานุกรม

Douglus, B.W. **Introduction to Graph Theory**. Prentice-Hall, 2001.

Ore, O. *Theory of graphs*. **Amer.Math, Soc.Collog.Publ, 38** : Providence, 1962.

Bottreou, Z.A. Metivier, Y. "Some remarks on the Kronecker product of Graph**.**" **Inform. Process. Lett**, 8 (1998) 279-286.

Weichsel, P.M. "The Kronecker product of graphs." **Proc. Amer. Math,** 8 (1962) 47-52.

Jha,P.K. and Slutzki, G. "Independence numbers of product graphs." **Appl. Math. Left**, 7 (4), 91-94, (1994).

Vesel, A. and Zerovnik, J. "The independence number of the strong product of odd cycles." **Discrete Math,** 182, 333-336, (1998).

Barnes, B.H. and Mackey, K.E. "A generalized measure of independence and the strong product of graphs." **Networks,** 8, 135-151, (1978).

Baitiang, C. and Sitthiwirattham, T. "Independent and Vertex Covering Number on Strong Product of Complete Graphs." **International Journal of Pure and Applied Mathematics,** 81(3), (2012).

ประวัติผู้วิจัย

ประวัติผู้วิจัย

1. **ชื่อ สกุล** ธมนวรรณ แสงงามมงคล
2. **ตำแหน่งปัจจุบัน** ผู้ช่วยศาสตราจารย์
3. **หน่วยงาน** คณะศิลปศาสตร์ พื้นที่ศาลายา
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลรัตนโกสินทร์
96 หมู่ 3 ต.ศาลายา อ.พุทธมณฑล จ.นครปฐม 73170
โทรศัพท์ 02-889-4585-7 ต่อ 2921-2 มือถือ 094-8492225
โทรสาร 02-889-4585-7 ต่อ 2920
e-mail : thamonwan.s @rmutr.ac.th
4. **ประวัติการศึกษา** ปริญญาโท กศ.ม. (คณิตศาสตร์)
ปริญญาตรี ศศ.ม. (คณิตศาสตร์)

1. **ชื่อ - นามสกุล** นายธานินทร์ สิทธิวิรัชธรรม
2. **ตำแหน่งปัจจุบัน** รองศาสตรจารย์
3. **หน่วยงาน** ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ
1518 5 ถนนประชาราษฏร์ 1 แขวงวงศ์สว่าง เขตบางซื่อ กรุงเทพมหานคร
โทรศัพท์ 02-587-8258 มือถือ 0880063809
โทรสาร 02-587-8258
e-mail : tst@kmutnb.ac.th
4. **ประวัติการศึกษา** ปริญญาโท กศ.ม. (คณิตศาสตร์)
ปริญญาตรี คบ. (คณิตศาสตร์)