



การสร้างโปรแกรมชุดฝึกซ้อมวงสวิงของการตีกอล์ฟ
เพื่อความคุม Gyroscope แบบ 3 แกน



รัฐศักดิ์ พรหมมาศ

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลรัตนโกสินทร์ วิทยาเขตวังไกลกังวล

พ.ศ. 2550

การสร้างโปรแกรมชุดฝึกซ้อมวงสวิงของการตีกอล์ฟ

เพื่อควบคุม Gyroscope แบบ 3 แกน



รัฐศักดิ์ พรหมมาศ

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี วิทยาเขตวังไกลกังวล

พ.ศ. 2550

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาการเคลื่อนที่ของ ไจโรสโคป (Gyroscope) แบบ 3 แกนโดยมีจุดมุ่งหมายเพื่อทำการกำหนดตำแหน่งและทิศทางการเคลื่อนที่ของไจโรสโคป (Gyroscope) โดยทำการหาค่าแรงบิดในแต่ละแกนเพื่อนำมาใช้เป็นค่าเริ่มต้นในการพัฒนาชุดไม้กอล์ฟฝึกซ้อมวงสวิงต่อไป โดยการทดลองนี้ได้ทำการกำหนดชนิดของไม้ และทิศทางการเคลื่อนที่ และตำแหน่งของเวลาจากโปรแกรมจำลอง วงสวิงของ Swing Maker และทำการกำหนดวิธีการคำนวณโดยใช้โปรแกรม เข้ามาช่วยวิเคราะห์และใช้วิธีการทาง Optimization มากำหนดวิธีการคำนวณเพื่อทำการหาค่าตอบของการเคลื่อนที่ โดยมุ่งหวังเพื่อที่จะนำไปใช้ในการออกแบบชุดฝึกซ้อมวงสวิงต่อไป

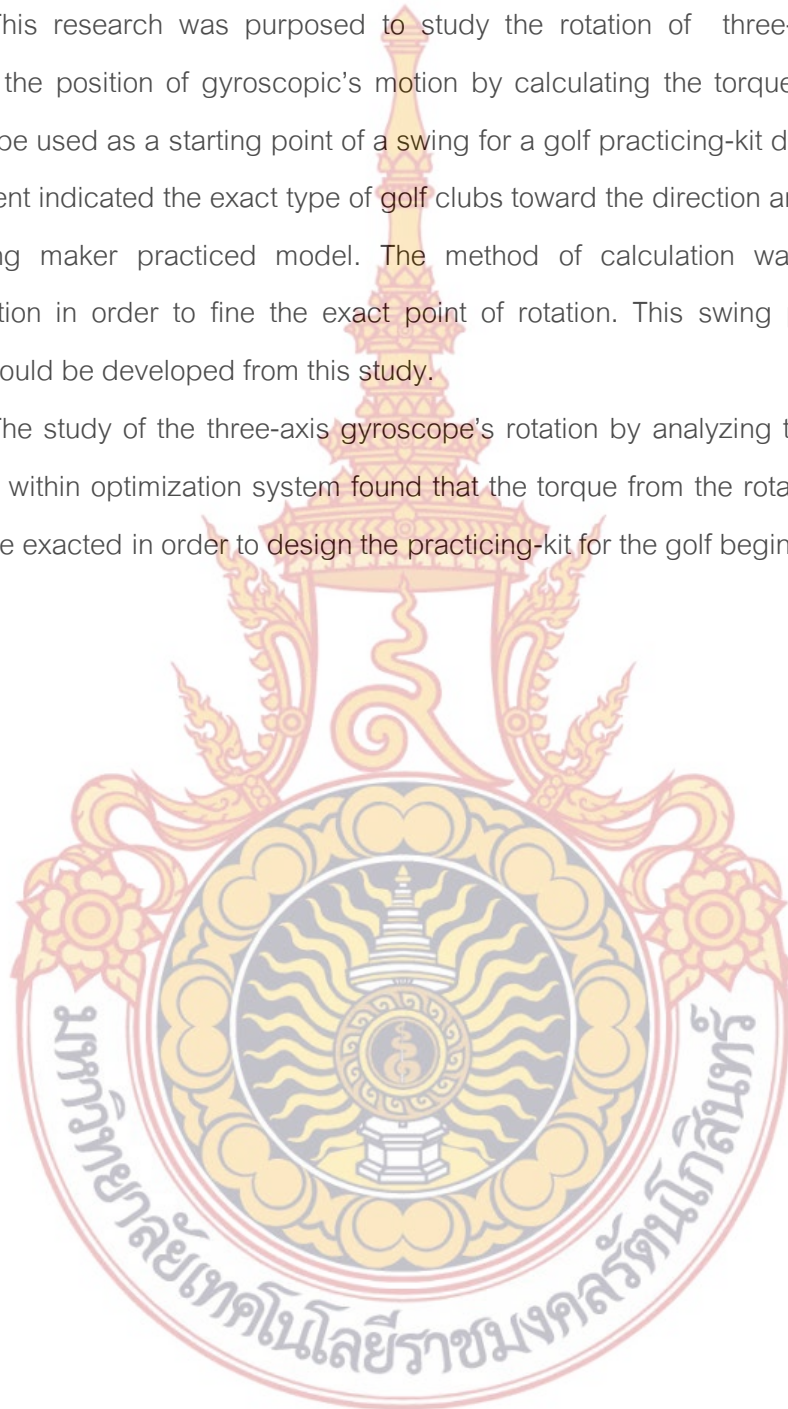
การศึกษาการเคลื่อนที่ของ ไจโรสโคป (Gyroscope) แบบ 3 มิติ โดยวิเคราะห์หาค่าแรงบิดในตำแหน่งต่างๆ ของวงสวิงที่เหมาะสมโดยวิธีการทาง Optimization พบว่าสามารถทำการกำหนดค่าแรงบิด ซึ่งเกิดจากการเคลื่อนที่ของวงสวิงได้และจะได้นำไปสู่การออกแบบชุดฝึกซ้อมวงสวิงกอล์ฟต่อไป



Abstract

This research was purposed to study the rotation of three-axis gyroscopic marking the position of gyroscopic's motion by calculating the torque of each axis in witch to be used as a starting point of a swing for a golf practicing-kit development. This experiment indicated the exact type of golf clubs toward the direction and the position of the swing maker practiced model. The method of calculation was generated by optimization in order to fine the exact point of rotation. This swing practicing kit for golfers could be developed from this study.

The study of the three-axis gyroscope's rotation by analyzing the torque in any direction within optimization system found that the torque from the rotation of the swing should be exacted in order to design the practicing-kit for the golf beginner.



สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ	1
ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา	1
วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัย	1
ขอบเขตของโครงการวิจัย	2
ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	2
2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	3
การทบทวนเอกสารที่เกี่ยวข้อง	3
ออปติไมต์เซชัน (Optimization)	4
3 วิธีดำเนินการวิจัย	27
การกำหนดปัญหา (State of the Problem)	27
การแก้ปัญหาเชิงตัวเลข (Numerical Methods)	28
การพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ (Computer Programming)	31
4 ผลการทดสอบและวิเคราะห์ผลการทดสอบ	32
การกำหนดรูปแบบของวงสวิง	32
การกำหนดตำแหน่งการเคลื่อนที่	34
การวัดองศาและวิธีการวัดค่า	35
ผลการทดสอบ	41
5 สรุปและวิจารณ์ผลการทดสอบ	45
สรุปและวิจารณ์ผลการทดสอบ	45
ข้อเสนอแนะ	45
บรรณานุกรม	46
ภาคผนวก	48

บัญชีตาราง

ตารางที่

หน้า

4.1 แสดงค่าองศาในด้าน ด้านหลัง, ด้านข้าง, ด้านบน

40



รายการรูปประกอบ

รูปที่		หน้า
2.1	แสดงการเคลื่อนที่ของความเร็วเชิงมุม	23
3.1	แสดงการเคลื่อนที่ของ Gyroscope ในแนวแกน X,Y,Z	28
3.2	แสดงรูปตัวอย่างวงสวิงด้านหลัง	32
4.1	แสดงรูปตัวอย่างวงสวิงด้านข้าง	33
4.2	แสดงรูปตัวอย่างวงสวิงด้านบน	33
4.3	แสดงรูปการปรับความเร็ววงสวิงของโปรแกรม Swing Maker	34
4.4	แสดงตำแหน่งที่ 1 ช่วงเวลาที่ 0 วินาทีวัดองศา ในระนาบ YZ = 25.39 องศา	35
4.5	แสดงตำแหน่งที่ 1 ช่วงเวลาที่ 0 วินาทีวัดองศา ในระนาบ YX = 2.68 องศา	35
4.6	แสดงตำแหน่งที่ 1 ช่วงเวลาที่ 0 วินาทีวัดองศา ในระนาบ ZX = 354.37 องศา	36
4.7	แสดงตำแหน่งที่ 2 ช่วงเวลาที่ 5 วินาทีวัดองศา ในระนาบ YZ = 305.24 องศา	36
4.8	แสดงตำแหน่งที่ 2 ช่วงเวลาที่ 5 วินาทีวัดองศา ในระนาบ YX = 352.5 องศา	36
4.9	แสดงตำแหน่งที่ 2 ช่วงเวลาที่ 5 วินาทีวัดองศา ในระนาบ ZX = 5.3 องศา	37
4.10	แสดงตำแหน่งที่ 3 ช่วงเวลาที่ 10 วินาทีวัดองศา ในระนาบ YZ = 344.8 องศา	37
4.11	แสดงตำแหน่งที่ 3 ช่วงเวลาที่ 10 วินาทีวัดองศา ในระนาบ YX = 344.47 องศา	37
4.12	แสดงตำแหน่งที่ 3 ช่วงเวลาที่ 10 วินาทีวัดองศา ในระนาบ ZX = 45.78 องศา	38
4.13	แสดงตำแหน่งที่ 4 ช่วงเวลาที่ 12 วินาทีวัดองศา ในระนาบ YZ = 321.3 องศา	38
4.14	แสดงตำแหน่งที่ 4 ช่วงเวลาที่ 12 วินาทีวัดองศา ในระนาบ YX = 294.4 องศา	38
4.15	แสดงตำแหน่งที่ 4 ช่วงเวลาที่ 12 วินาทีวัดองศา ในระนาบ ZX = 70 องศา	39
4.16	แสดงตำแหน่งที่ 5 ช่วงเวลาที่ 14 วินาทีวัดองศา ในระนาบ YZ = 18.82 องศา	39
4.17	แสดงตำแหน่งที่ 5 ช่วงเวลาที่ 14 วินาทีวัดองศา ในระนาบ YX = 274.8 องศา	39
4.18	แสดงตำแหน่งที่ 5 ช่วงเวลาที่ 14 วินาทีวัดองศา ในระนาบ ZX = 91.64 องศา	40
4.19	กราฟแสดงการเคลื่อนที่ของวงสวิงด้าน Top view, Side view, Back view	41
4.20	กราฟแสดงค่า T_1, T_2, T_3 ที่ออกจากโปรแกรม	44
4.21	กราฟแสดงการเคลื่อนที่ของวงสวิงที่ออกจากโปรแกรม	44

บทที่ 1

บทนำ

1. ความสำคัญและที่มาของปัญหาที่ทำวิจัย

ปัจจุบันกีฬาพาล์ฟได้เป็นที่สนใจและนิยมเล่นกันทั้งภายในประเทศและต่างประเทศทั้งในเชิงพาณิชย์จึงทำให้กีฬาประเภทนี้มีผู้สนใจอย่างแพร่หลายและเพิ่มมากขึ้นอย่างต่อเนื่องซึ่งสถานที่ในการเล่นและอุปกรณ์ต่างๆที่ใช้เป็นส่วนประกอบในการเล่นกีฬาประเภทนี้ก็ได้รับการพัฒนาควบคู่กันไปกับความนิยมที่มากขึ้นอย่างต่อเนื่องโดยที่ท่าอย่างไรไม่กอล์ฟจะมีน้ำหนักและจุดศูนย์ถ่วงที่เหมาะสมที่สุดและตีได้ระยะที่ไกลและทิศทางที่แม่นยำที่สุด สิ่งหนึ่งที่เป็นปัจจัยสำคัญไปกว่าอุปกรณ์ที่ได้มีการค้นคว้าและพัฒนาอย่างต่อเนื่องนั้นคือวงสวิงที่ถูกต้องและสวยงามซึ่งต้องอาศัยการฝึกซ้อมที่ถูกวิธีประกอบด้วยการขึ้นวงสวิงที่ถูกจังหวะและการวาดวงสวิงที่ถูกวิธีซึ่งจากที่ได้กล่าวมานั้นได้เกิดแนวคิดที่ว่าท่าอย่างไรการฝึกซ้อมนั้นสามารถฝึกซ้อมได้ด้วยตัวเองโดยไม่ต้องเดินทางไปที่สนามและการฝึกซ้อมนั้นท่าอย่างไรจึงจะมีวงสวิงที่ถูกต้องการฝึกซ้อมนั้นท่าอย่างไรจึงจะมีวงสวิงที่สวยงาม จากแนวคิดที่กล่าวมานี้ได้ทำการออกแบบชุดไม้กอล์ฟฝึกซ้อมวงสวิงโดยใช้ไจโรสโคป (Gyroscope)

จากหลักการการเคลื่อนที่แบบไจโรสโคป ที่สามารถควบคุมทิศทางและกำหนดทิศทางได้ซึ่ง ไจโรสโคปหนึ่งตัวใช้กับการกำหนดทิศทางหนึ่งทิศทางจากหลักการนี้ทำให้เกิดแนวคิดที่ว่าถ้าใช้ไจโรสโคป 3 ตัว มาทำการกำหนดทิศทางทั้ง 3 แกนเพื่อควบคุมการเคลื่อนที่ไปได้ทั้ง 3 แกน พร้อมกันโดยการกำหนดความเร็วการหมุนของ ไจโรสโคป ทั้ง 3 แกน ในช่วงเวลาพร้อมกันซึ่งจะได้ทิศทางที่แม่นยำและในทางตรงกันข้ามในกรณีที่มีแรงกระทำในทิศทางที่นอกเหนือทิศทางที่กำหนดซึ่งทำให้ ไจโรสโคป ไม่อยู่ในตำแหน่งที่กำหนดไว้จะทำให้เกิดแรงต้านจากแนวแกนเป็นอุปกรณ์ช่วยฝึกสอนและพัฒนาวงสวิงของผู้ฝึกหัดโดยที่จะสามารถทราบจุดบกพร่องและตำแหน่งของวงสวิงที่ผิดจังหวะซึ่งจะนำไปสู่แนวทางการแก้ไขวงสวิงของผู้ฝึกหัดโดยที่จะทำให้การตีกอล์ฟเกิดการพัฒนาไปอย่างรวดเร็วการตีแต่ละครั้งได้ระยะและทิศทางที่เหมาะสมที่สุดซึ่งทั้งนี้ทั้งนั้นขึ้นอยู่กับวิธีการฝึกซ้อมของผู้ฝึกหัดด้วย

2. วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อศึกษาการเคลื่อนที่ของ ไจโรสโคป แบบ 3 แกน
2. เพื่อหาแนวทางในการควบคุมการเคลื่อนที่ของไจโรสโคป แบบ 3 แกนไปกำหนดทิศทางของการเคลื่อนที่ของชุดไม้กอล์ฟฝึกซ้อมวงสวิงต่อไป

3. ขอบเขตของการวิจัย

1. ออกแบบการควบคุมการเคลื่อนที่ของใจโรสโคปใน แบบ 3 มิติ
2. ควบคุมความเร็วรอบเพื่อกำหนดทิศทางของความเร็วเชิงมุมของระบบใจโรสโคปแบบ 3 แกน

4. ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการวิจัย

สิ่งที่จะได้รับจากงานวิจัยนี้คือ สามารถกำหนดตัวแปรในโปรแกรมเพื่อใช้ในการควบคุมและกำหนดทิศทางการเคลื่อนที่ของใจโรสโคป แบบ 3 แกนเพื่อเป็นแนวทางในการประยุกต์สู่การสร้างชุดไม้กอล์ฟฝึกสอนวงสวิงโดยใช้ใจโรสโคปเป็นตัวควบคุมทิศทางไม้กอล์ฟ ซึ่งผู้ฝึกหัดนั้นจะได้มีการพัฒนางวงสวิงเพื่อการเล่นกีฬาที่ถูกต้องและมีวงสวิงที่สวยงาม



บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยครั้งนี้ ได้ศึกษาและทบทวนเอกสารงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง และนำเสนอตามหัวข้อต่อไปนี้

1. การทบทวนเอกสารงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

Hsien-Keng Chen; & Zheng-Ming Ge (2004) ได้ทำการวิจัยพฤติกรรมการเคลื่อนที่กลแบบ Two degree of freedom ของ ไจโรสโคป (Gyroscope) ที่มีการกระจายแรงสั่นสะเทือน ซึ่งเป็นพื้นฐานที่เกี่ยวกับคุณสมบัติของการประมาณการทางด้าน Numerical ซึ่งแสดงเป็นแบบไม่เป็นเชิงเส้นสามารถแสดงให้เห็นถึงความสม่ำเสมอของความไม่เป็นระเบียบของการเคลื่อนที่จากพฤติกรรมเชิงคุณสมบัติของระเบียบที่ทำการศึกษาโดยหลักทางคณิตศาสตร์ โดยขนาดมีส่วนเกี่ยวข้องเป็นจุดที่มีการแบ่งแยกของเส้นขนาดซึ่งสามารถทำการวิเคราะห์ส่วนที่ออกจากขอบเขตของระบบที่กำหนดโดยใช้วิธีทาง การคำนวณเชิงตัวเลขที่ใช้อัตราตามการบันทึกของเวลาและขอบเขตของระบบซึ่งเกิดจากผลกระทบของความเร็วในการหมุนของไจโรสโคป ที่เกิดจากพฤติกรรมเชิงกล

Kasahara; & et.al. (2000) เป็นการวิเคราะห์และวัดค่าด้วยไจโรสโคป แบบ 3 แกน ได้มีการพัฒนาการวัดค่าของแรงและทิศทางโดยใช้ไจโรสโคป มาเป็นตัววัดค่าของแรงและทิศทาง โดยที่ใช้วิธีการทางด้านพลศาสตร์ซึ่งเป็นลักษณะการวัดค่าทางไจโรสโคป ซึ่งค่าที่วัดได้นั้นสามารถตรวจสอบได้โดยทางทฤษฎีและโดยทางการทดลองซึ่งค่าที่ได้นั้นสามารถนำไปใช้วัดค่าของแรงในแบบ 3 แกนได้ ในการวัดค่าของแรงและทิศทางจะมีวิธีการโดยใช้จานหมุน 2 อันติดตั้งอยู่กับไจโรสโคป สำหรับ 1 แกนซึ่งจานหมุนนั้นจะใช้ Servomechanisms ในขณะที่จานหมุนนั้นค่าที่ต้องการนั้นจะทำมุมตามภาระของแรงที่กระทำ ในบางกรณีจะเกิดค่าความผิดพลาดในการวัดซึ่งต้องมีการกำหนดค่าตัวแปรเข้ามาชดเชย ซึ่งจะทำให้ค่าที่วัดนั้นออกมาแม่นยำขึ้น

Tan; & et.al. (2001) ได้ทำการวิจัยและออกแบบการประมวลผลการปฏิบัติการการตรวจสอบเส้นทิศทางการมองเห็นที่มีการเปลี่ยนแปลง โดยใช้กระจกที่ทำการควบคุมด้วยไจโรสโคปมาเป็นตัวควบคุมทิศทางของกระจกการมองเห็นของเครื่องบินและยานพาหนะที่ขับเคลื่อนอยู่ในอากาศ ซึ่งการหมุนของไจโรสโคปมีคุณสมบัติที่เมื่อเกิดการหมุนในแนวแกนแล้วจะสามารถรักษาระดับในแนวแกนไว้โดยที่ถ้ามีแรงภายนอกมากกระทำจะมีแรงต้านซึ่งเกิดจากการรักษาระดับ

ในแนวแกนของใจโรสโคปซึ่งจากคุณสมบัตินี้นำมาสู่การแก้ปัญหาในการควบคุมเครื่องมือการกำหนดทิศทางในเครื่องบินและพาหนะที่ขับเคลื่อนในอากาศโดยในงานวิจัยนี้จะกล่าวถึงการออกแบบประสิทธิภาพการควบคุมการทำงานของเส้นกำหนดทิศทางการมอง แบบไม่เป็นเชิงเส้น

รศ.ดร.ชิต เหล่าวัฒนา; ดร.ถวิดา มณีวรรณ และวรวพัฒน์ นุกุลวุฒิโภาส (2543) ได้วิจัยหุ่นยนต์เคลื่อนที่ได้ซึ่งกำลังได้รับการพัฒนาและวิจัยอย่างมากทั้งแบบเคลื่อนที่ด้วยล้อและการเคลื่อนที่ด้วยขา หุ่นยนต์บางชนิดเป็นแบบลูกผสม คือใช้ทั้งล้อและขา ศูนย์ปฏิบัติการเพื่อพัฒนาหุ่นยนต์ภาคสนาม (FIBO) มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรีได้เริ่มดำเนินการวิจัยออกแบบและสร้างหุ่นยนต์แบบใหม่ซึ่งใช้หลักการเคลื่อนที่แบบ ใจโรสโคป ในการรักษาสมดุลและกำหนดทิศทางการเคลื่อนที่ทำให้สามารถเคลื่อนไหวได้อย่างถูกต้อง ซึ่งหุ่นยนต์มีโครงสร้างภายนอกเป็นล้อซึ่งใช้การสมดุลแบบพลวัตภายในมีใจโรสโคปหมุนด้วยความเร็วสูงและทำให้เกิดการทรงตัวของใจโรสโคปซึ่งสามารถควบคุมการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ได้

อัมราพร บุญประทะทอง ศึกษาการแก้ปัญหาด้วยวิธีตรงของระบบทางพลศาสตร์ที่เหมาะสมด้วยวิธีการแก้ปัญหาของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น ร่วมกับวิธีของรุ่งเง-กุตตา” (The direct approach of general dynamic optimal control: nonlinear programming and Runge-Kutta method) โดยการแก้ปัญหาค่าเหมาะที่สุดของระบบควบคุมทางพลศาสตร์ (Dynamic-optimization problem) โดยใช้ Numerical integration ซึ่งในงานวิจัยนี้ใช้วิธีของรุ่งเง-กุตตา (Runge-Kutta) กำหนดเป็นปัญหาแล้วนำมาหาคำตอบด้วยวิธีของการแก้ปัญหาสำหรับโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น โดยสร้างกระบวนการหาคำตอบตามขั้นตอนบนโปรแกรม MATLAB และติดต่อผู้ใช้ได้โดยผ่านหน้าจอรับข้อมูล เพื่อให้ง่ายต่อการใช้งานและเปิดกว้างแก่ผู้ที่เริ่มศึกษา Optimization กระบวนการคำนวณใช้การคำนวณทาง Symbolic ประกอบกับ Optimization toolbox ในโปรแกรม MATLAB

2. ออปติไมซ์เซชัน (Optimization)

ออปติไมซ์เซชัน (Optimization) เป็นวิธีการหรือเครื่องมือทางคณิตศาสตร์เพื่อหาค่าที่เหมาะสมที่สุด ซึ่งค่าเหมาะสมที่สุดนี้เป็นได้ทั้งค่าที่ต่ำสุดหรือค่าสูงสุด เป้าหมายของการออปติไมซ์เซชัน (Optimization Goal) ทำเพื่อให้มีความคุ้มค่าที่สุดทั้งด้านการลงทุน พลังงาน การใช้ประโยชน์และความปลอดภัยนั่นเอง ก่อนที่เราจะสามารถนำออปติไมซ์เซชัน (Optimization) ไปประยุกต์เพื่อใช้งาน เราจะต้องทำการศึกษาและเข้าใจในรายละเอียดเสียก่อน ออปติไมซ์เซชัน (Optimization) นั้นสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้กับทุกสาขาวิชา แต่ในการค้นหาคำตอบของ

ปัญหาโดยเทคนิควิธีหาค่าเหมาะที่สุด (Optimization) จำเป็นที่จะต้องกำหนดลักษณะของปัญหาให้ออกมาในรูปของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เสียก่อน คือ ดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables), ดีไซน์พารามิเตอร์ (Design parameters) และดีไซน์ฟังก์ชัน (Design functions) ซึ่งมีรายละเอียดปลีกย่อยดังนี้

2.1 ดีไซน์วาริเอเบิล (Design Variables)

คือตัวแปรหรือสิ่งที่บอกถึงรายละเอียดของการออกแบบ ในทางคณิตศาสตร์ตัวแปรคือตัวที่ไม่ทราบค่าและต้องทำการหาค่าออกมาดีไซน์วาริเอเบิลนั้นผู้ออกแบบจำเป็นต้องใช้ประสบการณ์, ความชำนาญ, ข้อกำหนดของวิธี และพื้นฐานความรู้มาเป็นองค์ประกอบการตัดสินใจ หลักการและวิธีการของดีไซน์วาริเอเบิล คือต้องเป็นลิเนียร์อินดิเพนเดนท (Linear independent) หมายความว่าดีไซน์วาริเอเบิลจะไม่สามารถถูกกำหนดขึ้นมาจากการใช้ความสัมพันธ์ทางเลขคณิตได้ ดีไซน์วาริเอเบิลสามารถมีได้หลายตัวเพื่อที่จะให้การออกแบบนั้นมีความสมบูรณ์ และกลุ่มดีไซน์วาริเอเบิลเหล่านี้จะถูกเรียกว่า ดีไซน์เวกเตอร์ (Design vector: matrix) และใช้อักษร n แทนจำนวนใดๆ ของดีไซน์วาริเอเบิลและในทอมทางคณิตศาสตร์นั้นมักจะใช้อักษร x และมีตัวเลขห้อยเพื่อระบุลำดับที่ของตัวแปรของการออกแบบนั้นๆ มักมีการเขียนสัญลักษณ์ของดีไซน์เวกเตอร์หลายลักษณะดังนี้ คือ $[X]$, X หรือ \mathbf{X} , $[x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ และ $x_i, i = 1, 2, \dots, n$

2.2 ดีไซน์พารามิเตอร์ (Design Parameters)

คือสิ่งที่คงที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงในขณะที่กำลังออกแบบอยู่ถึงแม้ว่าจะมีการออกแบบในลักษณะที่แตกต่างกัน เช่น ภาวะที่กระทำ คุณสมบัติของวัสดุและลักษณะรูปทรงเป็นต้น ดีไซน์พารามิเตอร์สามารถมีได้หลายตัวเช่นเดียวกับดีไซน์วาริเอเบิลและเป็น เวกเตอร์ (Vector: matrix) เช่นกัน สามารถเขียนสัญลักษณ์ได้คล้ายๆ กันดังนี้ คือ $[P]$, P หรือ p และ $[p_1, p_2, \dots, p_q]^T$

2.3 ดีไซน์ฟังก์ชัน (Design Functions)

คือข้อมูลสำคัญเกี่ยวกับการออกแบบโดยจะใช้ดีไซน์วาริเอเบิลและดีไซน์พารามิเตอร์มาประเมินค่าและเป็นตัวพิสูจน์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของปัญหาการออกแบบด้วย ดีไซน์ฟังก์ชันนี้สามารถแสดงออกมาในรูปแบบของดีไซน์ออปเจกทีฟและ/หรือเงื่อนไขบังคับ (Design objectives and/or constraints) ซึ่งจะเป็นตัวผลักดันให้เกิดการค้นหาค่าการออกแบบที่เหมาะสม

ขึ้นมาและต้องเป็นไปตามเงื่อนไขบังคับด้วยจึงจะถือว่าเป็นการออกแบบที่สมบูรณ์และใช้งานได้ (Feasible) ตัวอย่างเช่น ต้องการออกแบบให้โครงสร้างมีมวลน้อยที่สุดนี้ก็กลายเป็นออปเจกทีฟ ฟังก์ชัน (Objective function) โดยที่ความเค้นในวัสดุจะต้องน้อยกว่าความต้านแรงดึงคราก (Yield strength) นี้ก็จะเป็นคอนสเตรนทฟังก์ชัน (Constraint functions) ซึ่งมีรายละเอียดปลีกย่อยดังต่อไปนี้

2.4 รูปแบบมาตรฐานออปติไมซ์เซชัน (The Standard Format Optimization)

จากที่กล่าวมานั้นเป็นองค์ประกอบโดยทั่วไปของแบบจำลองเพื่อหาค่าทางคณิตศาสตร์ โดยการใช้เทคนิคออปติไมซ์เซชัน (Optimization) และมีการเขียนในเทอมทางคณิตศาสตร์ได้ หลายๆ แบบดังนี้

$$\text{หาค่าน้อยที่สุดของ } f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.1)$$

$$\text{โดยสอดคล้องกับเงื่อนไข: } g_l(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, l = 1, 2, \dots, m \quad (2.2)$$

$$c_l(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, l = 1, 2, \dots, m \quad (2.3)$$

$$x_j' \leq x_j \leq x_j'', j = 1, 2, \dots, n \quad (2.4)$$

เขียนในลักษณะที่เป็นเวกเตอร์ดังนี้

$$\text{หาค่าน้อยที่สุดของ } f(X), [X]_n \quad (2.5)$$

$$\text{โดยสอดคล้องกับเงื่อนไข: } [g(X)]_l = 0 \quad (2.6)$$

$$[c(X)] \leq 0 \quad (2.7)$$

$$X^{low} \leq X \leq X^{up} \quad (2.8)$$

2.5 ออปติไมซ์เซชันกับปัญหาทางวิศวกรรม

ปัญหาทางวิศวกรรมที่ดีที่สุดไซนารีเอเบิลไม่ขึ้นกับเวลาและมีการนำเอาออปติไมซ์เซชัน (Optimization) เข้ามาประยุกต์ใช้งานจะเรียกกันว่า สถิติกออปติไมซ์เซชัน (Static optimization) ส่วนปัญหาที่ขึ้นกับเวลาจะเรียกว่า ไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) ดังที่ได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อที่ผ่านมาพบว่าเป้าหมายของออปติไมซ์เซชัน (Goal of optimization) คือการ ค้นหาค่าที่เหมาะสมของดีไซนารีเอเบิล (Design variables) ที่มีออปเจกทิฟฟังก์ชัน (Objective function) เป็นค่าน้อยสุดหรือมากที่สุด (Minimum or maximum) ซึ่งมีอยู่สองลักษณะคือ โกลบอล (Global) และโลคอล (Local)

2.5.1 กรณีน้อยสุด (Minimum)

กลุ่มของเวกเตอร์ $\bar{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x_1, \dots, x_n)$ เป็นโกลบอลมีนัม (Global minimum) ได้ถ้า

$$f(x_1, \dots, x_n) \leq f(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n) \quad (2.9)$$

เมื่อ $\bar{h}^T = [h_1 \ h_2 \ \dots \ h_n] \neq 0$ เป็นเวกเตอร์ที่เพิ่มค่าให้กับ $\bar{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ แล้วทำให้เกิดค่าของฟังก์ชันที่มากขึ้นกว่าเดิม และกลุ่มของเวกเตอร์ $\bar{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x_1, \dots, x_n)$ มีค่าน้อยที่สุดเมื่อเปรียบเทียบกับบริเวณข้างเคียง (Neighborhood) แล้วจะเรียกว่าโลคอลมีนัม (Local minimum)

2.5.2 กรณีมากที่สุด (Maximum)

กลุ่มของเวกเตอร์ $\bar{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x_1, \dots, x_n)$ เป็นโกลบอลแมกซิมัม (Global maximum) ได้ถ้า

$$f(x_1, \dots, x_n) \geq f(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n) \quad (2.10)$$

เมื่อ $\bar{h}^T = [h_1 \ h_2 \ \dots \ h_n] \neq 0$ เป็นเวกเตอร์ที่เพิ่มค่าให้กับ $\bar{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ แล้วก็ยังทำให้ค่าของฟังก์ชันน้อยกว่าเดิม และกลุ่มของเวกเตอร์ $\bar{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x_1, \dots, x_n)$ มีค่ามากที่สุดเมื่อเปรียบเทียบกับบริเวณข้างเคียง (Neighborhood) แล้วจะเรียกว่าโลคอลแมกซิมัม (Local maximum)

2.6 พลศาสตร์ออปติไมซ์เซชัน (Dynamic Optimization)

ปัญหาทางวิศวกรรมที่ตัวแปรต่างๆ ขึ้นกับเวลาจะถูกเรียกว่าพลศาสตร์และมักจะใช้สมการเชิงอนุพันธ์มาเป็นตัวแสดงระบบพลศาสตร์ (Dynamic systems) ดังนี้

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t), i = 1, \dots, n \quad (2.11)$$

เมื่อ t คือเวลา (Time), x_i คือสแตตวารีเอเบิล (State variables) ตัวอย่างเช่น พิกัดทั่วไปหรืออนุพันธ์เวลา (Generalized coordinates or time derivatives), u_i คือคอนโทรลอินพุต (Control inputs) และ f_i คืออนอนลิเนียร์ฟังก์ชัน (Nonlinear functions) ของสแตตวารีเอเบิล (State variables) และคอนโทรลอินพุต (Control inputs) หากทำการกำหนดค่าให้กับคอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_1(t), \dots, u_m(t)$ เป็นเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial condition) เราก็จะสามารถทำการคำนวณวิถี (Trajectory) ของสแตตวารีเอเบิล (State variables) $x_i(t)$ ได้ด้วยวิธีอนาลิติกหรือวิธีเชิงตัวเลข (Analytical or numerical) ได้ ตัวอย่างเช่นการเคลื่อนที่เป็นเส้นตรง (Rectilinear) ของอนุภาค (Particle) หนึ่งหน่วยมวลภายใต้แรงกระทำภายนอกที่ป้อนให้ สามารถเขียนอธิบายได้ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ (Differential equation) เป็น $\ddot{x} = u$ เมื่อ x คือตำแหน่งของอนุภาคและ u คือแรงกระทำ จะเห็นได้ว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง (Second-order differential equation) แต่สามารถทำการแปลงให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First-order differential equation) ดังสมการ (2.11) ได้ นั่นคือให้ $\dot{x}_1 = x_2$ และ $\dot{x}_2 = u$ สำหรับระบบทางวิศวกรรมที่แสดงได้ด้วยสมการ (2.11) นั้น โดยปกติแล้วจะต้องมีการกำหนดสภาวะเริ่มต้นเสมอ (Initial state) จากนั้นก็ทำการเลือกช่วงเวลาให้กับคอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_1(t), \dots, u_m(t)$ เพื่อให้หาค่าของฟังก์ชัน (Objective function) เป็นค่าน้อยสุดหรือมากที่สุด ปัญหาไดนามิกจะเรียกค่าของฟังก์ชัน (Objective function) ว่าคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) และเขียนเป็นสมการดังนี้

$$J = \Phi(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.12)$$

เมื่อ t_0 คือเวลาเริ่มต้น, t_f คือเวลาสุดท้าย, ส่วนคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) ประกอบไปด้วยสองส่วน ส่วนแรกคือ $\Phi(t, x_1, \dots, x_n)$ ซึ่งจะขึ้นอยู่กับเวลาสุดท้าย (Final time) และสภาวะสุดท้าย (Final state) ของระบบ ส่วนที่สองคือ $\int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt$ เป็นส่วนที่ขึ้นอยู่กับเวลาที่ผ่านไป (Time history) ของสแตตวารีเอเบิล (State variables) และคอนโทรลอินพุต

(Control variables) โดยที่ Φ และ L คืออนอนลิเนียร์ฟังก์ชัน (Nonlinear functions) ของสแตตวารีเอเบิล (State variables) และคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variables)

2.7 แคลคูลัสของฟาริเอชัน (Calculus of Variations)

โดยจะเริ่มจากระบบชั้นความเสี่เดียว (Single-stage systems) และระบบหลายระดับชั้นความเสี่ (Multistage systems) ตามลำดับ สัญลักษณ์ที่ใช้แทนแคลคูลัสของฟาริเอเบิล (Calculus of variation) ก็คือฟังก์ชันนอล (Functional) เขียนเป็นสมการได้เป็น

$$J[x] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x, \dot{x}) dt \quad (2.13)$$

ซึ่งเป็นการเปลี่ยนฟังก์ชันต่อเนื่อง (Continuous functions) $x(t)$ ให้เป็นจำนวนจริง นั่นคือถ้ากำหนด $x(t)$ ก็จะสามารถหาค่าของฟังก์ชันนอล (Functional) ได้โดยการใช้วิธีอนาลิติกหรือวิธีเชิงตัวเลข (Analytical or numerical) โดยที่ฟังก์ชันนอล (Functional) อาจจะขึ้นอยู่กับหลายๆ ฟังก์ชันต่อเนื่อง $J[x_1, x_2, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) dt \quad (2.14)$

ฟังก์ชันนอล (Functional) เป็นการเปลี่ยนฟังก์ชันต่อเนื่อง (Continuous functions) หลากๆ ฟังก์ชัน ก็คือ $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ ให้เป็นจำนวนจริงนั่นเอง ในการนำเอาแคลคูลัสของฟาริเอเบิล (Calculus of variations) มาใช้นั้นมีเป้าหมายเดียวกันกับสแตติกออปติไมซ์เซชัน (Static optimization) นั่นก็คือ ค้นหาเนคเซสเซอร์รี่คอนดิชัน (Necessary conditions) สำหรับเอ็กทรีมัม (Extremum) สำหรับฟังก์ชันนอล (Functional) และการตรวจสอบว่าเอ็กทรีมัม (Extremum) ที่หาได้เป็นค่าน้อยสุดหรือมากที่สุด (Sufficient conditions) ในการนำเอาแคลคูลัสของฟาริเอเบิล (Calculus of variations) มาใช้กับไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) จะเกี่ยวข้องกับจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้าย ซึ่งมีได้หลายกรณี ดังรายละเอียดต่อไปนี้

2.7.1 ฟังก์ชันนอลของฟังก์ชันเดี่ยว (Functionals of a Single Function)

เป็นฟังก์ชันนอล (Functional) ของระบบชั้นความเสี่เดียว (Single-stage systems) โดยมีรายละเอียดของจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายหลายลักษณะดังนี้ คือ

2.7.2 กำหนดจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายไว้คงที่ (Fixed End Time and End Points)

ถ้าฟังก์ชัน $F(t, x, \dot{x})$ สามารถทำอนุพันธ์อันดับหนึ่งและสองได้อย่างต่อเนื่องโดยอยู่ระหว่างช่วงเวลา $t_0 \leq t \leq t_f$ และสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x(t_0) = x_0$ และ $x(t_f) = x_f$ ก็จะเป็นการกำหนดการค้นหาค่าของฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire function) $x(t)$ ที่เป็นเอ็กซ์ตรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) $J[x] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x, \dot{x}) dt$ นั่นเอง ซึ่งมีวิธีการทำได้ดังนี้ คือ เรากำหนดให้ $x(t)$ เป็นฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire function) ที่เป็นเอ็กซ์ตรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) $J[x]$ ถ้า $x(t)$ ถูกเพิ่มค่าด้วย $h(t)$ ดังนั้นเพื่อให้ยังคงสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) อยู่ ดังนั้น $h(t_0) = h(t_f) = 0$ ก็จะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (Functional) ΔJ เป็น

$$\Delta J = J[x+h] - J[x] = \int_{t_0}^{t_f} [F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) - F(t, x, \dot{x})] dt \quad (2.15)$$

เมื่อใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ได้การเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} h + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{h} \right) dt \quad (2.16)$$

เมื่อ δJ เป็นค่าโดยประมาณของ ΔJ เนื่องจากได้ตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ดังนั้นเมื่อทำการอินทิเกรตโดยพาส (Integrating by parts) ก็จะพบว่า

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) h dt + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_f} - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_0} \quad (2.17)$$

เมื่อเงื่อนไขจำเป็น (Necessary conditions) ก็คือ $\delta J = 0$ ที่ $h(t_0) = h(t_f) = 0$ จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) และกำหนดไว้ดีกว่า F จะต้องทำอนุพันธ์ได้อย่างต่อเนื่องสองครั้ง นั่นก็หมายความว่า $\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่อง และเมื่อ $\delta J = 0$ ซึ่งพบว่า

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (2.18)$$

ซึ่งสมการนี้เป็นที่รู้จักกันในนาม สมการของออยเลอร์ (Euler's equation) ซึ่งจะทำให้ผลเฉลยของ $x(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x(t_0) = x_0$ และ $x(t_f) = x_f$ ซึ่งเราสามารถทำการหาค่าโดยใช้ความรู้ทางแคลคูลัส (Calculus) หาค่าได้โดยวิธีออยเลอร์-ควอซี (Euler-Cauchy) ได้

2.7.3. กำหนดเวลาสุดท้ายคงที่แต่จุดสุดท้ายแปรผันได้ (Fixed End Time, Variable End Points)

แตกต่างกับกรณี (2.7.2) เพียงแค่จุดสุดท้ายเท่านั้น ดังนั้นจึงได้ เพียงแต่เงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x(t_0)$ และ $x(t_f)$ ไม่ได้ถูกกำหนดไว้ตายตัว และ $h(t_0), h(t_f)$ ก็สามารถกำหนดได้ตามชอบใจ ทำให้ได้เงื่อนไขจำเป็น (Necessary conditions) เป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_0} = 0 \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_f} = 0 \quad (2.21)$$

ซึ่งสมการนี้เป็นที่รู้จักกันในนามสมการของออยเลอร์ (Euler's equation) ซึ่งจะทำให้ผลเฉลยของ $x(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x(t_0)$ และ $x(t_f)$ ซึ่งสามารถหาค่าโดยใช้ความรู้ทางแคลคูลัส (Calculus) โดยวิธีออยเลอร์-ควอซี (Euler-Cauchy) ได้

2.7.4 เวลาสุดท้ายและจุดสุดท้ายแปรผันได้ (Variable End Time and End Points)

กรณีนี้ถือได้ว่าเป็นรูปแบบทั่วไปของปัญหาทางวิศวกรรมเลยก็ว่าได้แต่ก็มีวิธีการหาคำตอบคล้ายๆ กับกรณี (2.7.2) ถ้า $x(t)$ เป็นฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire function) ที่เป็นเอ็กซ์ตรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) $J[x]$ ถ้า $x(t)$ ถูกเพิ่มค่าด้วย $h(t)$ ดังนั้นก็จะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (Functional) ΔJ เป็น

$$\begin{aligned}
\Delta J &= J[x+h] - J[x] \\
&= \int_{t_0+\delta t_0}^{t_f+\delta t_f} F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) dt - \int_{t_0}^{t_f} F(t, x, \dot{x}) dt \\
&= \int_{t_0}^{t_f} [F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) - F(t, x, \dot{x})] dt \\
&\quad + \int_{t_f}^{t_f+\delta t_f} F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) dt - \int_{t_0+\delta t_0}^{t_0+\delta t_0} F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) dt
\end{aligned} \tag{2.22}$$

เมื่อใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป จะได้การเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\begin{aligned}
\delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} h + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{h} \right) dt + F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) \Big|_{t_f} \delta t_f \\
&\quad - F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) \Big|_{t_0} \delta t_0
\end{aligned} \tag{2.23}$$

เมื่อ δJ เป็นค่าโดยประมาณของ ΔJ เนื่องจากได้ตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ดังนั้นเมื่อทำการอินทิเกรตโดยพาส (Integrating by parts) สมการก็จะพบว่า

$$\begin{aligned}
\delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) h dt + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_f} - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_0} \\
&\quad + F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) \Big|_{t_f} \delta t_f - F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) \Big|_{t_0} \delta t_0
\end{aligned} \tag{2.24}$$

เมื่อ $h(t_0) = \delta x \Big|_{t_0} - \dot{x} \Big|_{t_0} \delta t_0$ และ $h(t_f) = \delta x \Big|_{t_f} - \dot{x} \Big|_{t_f} \delta t_f$ ดังนั้นเขียนสมการใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}
\delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) h dt + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta x \right) \Big|_{t_f} - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta x \right) \Big|_{t_0} \\
&\quad + \left[F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right] \Big|_{t_f} \delta t_f - \left[F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right] \Big|_{t_0} \delta t_0
\end{aligned} \tag{2.25}$$

เมื่อเงื่อนไขจำเป็น (Necessary conditions) ก็คือ $\delta J = 0$ ที่ $h(t)$, $\delta x \Big|_{t_f}$, $\delta x \Big|_{t_0}$, δt_f และ δt_0 จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ทำให้ได้เงื่อนไขจำเป็น (Necessary conditions) และมีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) คือ

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_0} = 0, \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_f} = 0, \left[F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right] \Big|_{t_f} = 0, \left[F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right] \Big|_{t_0} = 0 \quad (2.28)$$

ซึ่งจุดสุดท้ายที่ t_0, t_f และค่าของฟังก์ชันที่จุดสุดท้าย $x(t_0), x(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ทั้ง 4 นี้แน่นอน

2.8 ฟังก์ชันนอลของหลายฟังก์ชัน (Functionals of Variance Functions)

เป็นฟังก์ชันนอล (Functional) ของระบบหลายระดับขั้นความเสรี (Multistage systems) โดยมีรายละเอียดของจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายหลายลักษณะดังนี้ คือ

2.8.1 กำหนดจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายไว้คงที่ (Fixed End Times and End Points)

ถ้าฟังก์ชัน $F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$ สามารถทำอนุพันธ์อันดับหนึ่งและสองได้อย่างต่อเนื่องโดยอยู่ระหว่างช่วงเวลา $t_0 \leq t \leq t_f$ และสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x_i(t_0) = x_{i1}$ และ $x_i(t_f) = x_{i2}$ ก็จะเป็นการกำหนดการค้นหาค่าของฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire function) $x_i(t), i = 1, \dots, n$ ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) $J[x] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x, \dot{x}) dt$ นั่นเอง ซึ่งมีวิธีการทำได้ดังนี้คือ เรากำหนดให้ $x(t)$ เป็นฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire function) ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) คือ

$$J[x_1, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt \quad (2.28)$$

ถ้า $x_i(t), i = 1, \dots, n$ ถูกเพิ่มค่าด้วย $h_i(t), i = 1, \dots, n$ และเพื่อให้ยังคงสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) ดังนั้น $h_i(t_0) = h_i(t_f) = 0$ ก็จะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (Functional) ΔJ เป็น

$$\begin{aligned}\Delta J &= J[x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n] - J[x_1, \dots, x_n] \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left[F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) \right. \\ &\quad \left. - F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \right] dt\end{aligned}\quad (2.29)$$

ใช้นุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไปก็จะได้การเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} h_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{h}_i \right) dt \quad (2.30)$$

เมื่อ δJ เป็นค่าโดยประมาณของ ΔJ เนื่องจากได้ตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ดังนั้นเมื่อทำการอินทิเกรตโดยพาส (Integrating by parts) สมการก็จะพบว่า

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i dt + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \Big|_{t_f} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \Big|_{t_0} \right] \quad (2.31)$$

เมื่อเงื่อนไขจำเป็น (Necessary conditions) ก็คือ $\delta J = 0$ ที่ $h_i(t_0) = h_i(t_f) = 0$ จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) และกำหนดไว้ดีกว่า F จะต้องทำอนุพันธ์ได้อย่างต่อเนื่องสองครั้งนั้นก็หมายความว่า $\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องและเมื่อ $\delta J = 0$ ดังนั้นพบว่า

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, i = 1, \dots, n \quad (2.32)$$

ซึ่งสมการนี้เป็นที่รู้จักกันในนามสมการของออยเลอร์ (Euler's equation) ซึ่งจะทำให้ผลเฉลยของ $x_i(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x_i(t_0) = x_{i1}$ และ $x_i(t_f) = x_{i2}$ ซึ่งเราสามารถทำการหาค่าโดยใช้ความรู้ทางแคลคูลัส (Calculus) หาค่าได้โดยวิธีออยเลอร์-ควอซี (Euler-Cauchy) ได้

2.8.2 กำหนดเวลาสุดท้ายไว้คงที่แต่จุดสุดท้ายแปรผันได้ (Fixed End Time and Variable End Points)

แตกต่างกับกรณี (2.8.1) เพียงแค่จุดสุดท้ายเท่านั้น ดังนั้นจึงใช้สมการของหัวข้อ (2.8.1) ได้ เพียงแต่เงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x_i(t_0)$ และ $x_i(t_f)$ ไม่ได้ถูกกำหนดไว้ตายตัว และ $h_i(t_0), h_i(t_f)$ จึงสามารถกำหนดได้ตามการใช้งาน ทำให้ได้เงื่อนไขจำเป็น (Necessary condition) เป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, i = 1, \dots, n \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_0} = 0, i = 1, \dots, n \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_f} = 0, i = 1, \dots, n \quad (2.35)$$

ซึ่งสมการนี้เรียกว่าสมการของออยเลอร์ (Euler's equation) ซึ่งจะทำให้ผลเฉลยของ $x_i(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x_i(t_0)$ และ $x_i(t_f)$ ซึ่งเราสามารถทำการหาค่าโดยใช้ความรู้ทางแคลคูลัส (Calculus) หาค่าได้โดยวิธีออยเลอร์-คาวชี (Euler-Cauchy) ได้เช่นกัน

2.8.3 เวลาสุดท้ายและจุดสุดท้ายแปรผันได้ (Variable End Time and End Points)

กรณีนี้เป็นรูปแบบทั่วไปที่ใช้เป็นเงื่อนไขหลักในการแก้ปัญหาทางวิศวกรรมแต่ก็มีวิธีการหาค่าตอบใกล้เคียง กับกรณี (2.8.1) ถ้า $x_i(t), i = 1, \dots, n$ เป็นฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire function) ที่เป็นเอ็กซ์ตรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) $J[x_1, \dots, x_n]$ ถ้า $x_i(t)$ ถูกเพิ่มค่าด้วย $h_i(t)$ ดังนั้นก็จะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (Functional) ΔJ เป็น

$$\begin{aligned} \Delta J &= J[x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n] - J[x_1, \dots, x_n] \\ &= \int_{t_0 + \delta t_0}^{t_f + \delta t_f} F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) dt \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} &- \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt \\ \Delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left[F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) \right. \\ &\quad \left. - F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \right] dt \\ &+ \int_{t_f}^{t_f + \delta t_f} F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) dt \\ &- \int_{t_0 + \delta t_0}^{t_0} F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) dt \end{aligned} \quad (2.37)$$

เมื่อใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป จะได้การเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} h_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{h}_i \right) dt \\ &\quad + F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) \Big|_{t_f} \delta t_f \\ &\quad - F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) \Big|_{t_0} \delta t_0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

เมื่อ δJ เป็นค่าโดยประมาณของ ΔJ เนื่องจากได้ตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ดังนั้นเมื่อทำการอินทิเกรตโดยพาส (Integrating by parts) สมการก็จะพบว่า

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i dt + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \right) \Big|_{t_f} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \right) \Big|_{t_0} \\ &\quad + \left[F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) \right]_{t_f} \delta t_f \\ &\quad - \left[F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) \right]_{t_0} \delta t_0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

เมื่อ $h_i(t_0) = \delta x_i \Big|_{t_0} - \dot{x}_i \Big|_{t_0} \delta t_0$ และ $h_i(t_f) = \delta x_i \Big|_{t_f} - \dot{x}_i \Big|_{t_f} \delta t_f$ ดังนั้นสมการจะเป็น

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i dt + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right) \Big|_{t_f} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right) \Big|_{t_0} \\ &\quad + \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_f} \delta t_f - \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_0} \delta t_0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

เมื่อ $\delta J = 0$ ที่ $h_i(t)$, $\delta x_i \Big|_{t_f}$, $\delta x_i \Big|_{t_0}$, δt_f และ δt_0 จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ทำให้ได้เงื่อนไขจำเป็น (Necessary conditions) เป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, i = 1, \dots, n \quad (2.41)$$

และมีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) เป็น

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_0} = 0, \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_f} = 0, i = 1, \dots, n \\ \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_f} = 0, \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_0} = 0, i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.42)$$

ซึ่งจุดสุดท้ายที่ t_0, t_f และค่าของฟังก์ชันที่จุดสุดท้าย $x_i(t_0), x_i(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ทั้ง 4 นี้แน่นอน

2.9 ฟังก์ชันนอลมีเงื่อนไขบังคับ (Functionals with Constraints)

เป็นฟังก์ชันนอล (Functional) ที่มีเงื่อนไขบังคับเข้ามาเกี่ยวข้องด้วยซึ่งอาจจะเป็นได้ทั้งอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Equality constraints) และอินอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Inequality constraints) ในที่นี้จะกล่าวถึงเฉพาะวิธีลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multiplier)

2.9.1 ฟังก์ชันคอนสเทรนต์ (Function Constraints)

พิจารณาฟังก์ชันนอล (Functional) $J[x_1, \dots, x_n]$ ซึ่งจะต้องเกี่ยวข้องหรือสอดคล้องกับฟังก์ชันอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Equality constraints) $g_j(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = 0, j = 1, \dots, m$ และ $m < n$ เสมอ เมื่อเราใช้เทคนิควิธีการแบบลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multiplier) ก็จะได้ฟังก์ชันนอลใหม่เป็น

$$J'[x_1, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} \left[F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) g_j(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \right] dt \quad (2.43)$$

เมื่อ $\lambda_j(t)$ คือลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multiplier) และ $F' = F + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j$ ซึ่งจะเป็น F ตัวใหม่ของเนคเซสเซอร์คอนดิชัน (Necessary conditions) เพื่อใช้สำหรับเอ็กซ์ตรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functional) นั้นเอง โดยจะนำไปใช้กับลักษณะของเวลาและจุดสุดท้ายทั้งสามแบบดังที่กล่าวมาแล้ว นั่นก็คือ กำหนดจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายไว้ตายตัว (Fixed end time and end points), กำหนดเวลาสุดท้ายไว้ตายตัวแต่จุดสุดท้ายแปรผันได้ (Fixed end time, variable end points) และเวลาสุดท้ายและจุดสุดท้ายแปรผันได้ (Variable end time and end points) ซึ่งกระทำได้เพียงแค่เปลี่ยนจาก F เป็น F' ก็สามารถทำการหาเนคเซสเซอร์คอนดิชัน (Necessary conditions) ซึ่ง $\delta J' = 0$ ได้เช่นกัน โดยที่ $g_j = 0$ ก็ทำให้สามารถเอ็กซ์ตรีมัม (Extremum) ได้

2.9.2 ฟังก์ชันเงื่อนไขบังคับที่จุดสุดท้าย (End Point Function Value Constraints)

เอ็กทรีมัมของฟังก์ชันนอล (Functional) $J[x_1, \dots, x_n]$ ซึ่งฟังก์ชัน $x_i(t_f)$ จะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ (Constraints) $s_k(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} = 0, k = 1, \dots, p$ ณ เวลาสุดท้าย การหาผลเฉลยของปัญหานี้จะสามารถทำการเขียนฟังก์ชันนอล (Functional) ใหม่ได้เป็น

$$J'[x_1, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt + \sum_{k=1}^p \nu_k s_k \quad (2.44)$$

เมื่อ ν_k คือค่าคงตัวลากรางจ์มัลติพลีเออร์ (Constant Lagrange multiplier) ทำให้สามารถดัดแปลงสมการได้เป็น

$$\begin{aligned} \delta J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i dt + \sum_{i=1}^n \left[\left\{ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{k=1}^p \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial \dot{x}_i} \right\} \delta x_i \right]_{t_f} \\ & - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right) \Big|_{t_0} + \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i + \sum_{k=1}^p \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial t} \right]_{t_f} \delta t_f \\ & - \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_0} \delta t_0 \end{aligned} \quad (2.45)$$

เมื่อเงื่อนไขจำเป็น (Necessary condition) ก็คือ $\delta J' = 0$ ที่ $h_i(t), \delta x_i|_{t_f}, \delta x_i|_{t_0}, \delta t_f$ และ δt_0 จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จะได้เนคเซสเซอร์ีคอนดิชัน (Necessary conditions) เป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, i = 1, \dots, n \quad (2.46)$$

โดยที่ $s_k = 0$ จึงจะทำให้ได้คำตอบที่เป็นที่ยอมรับได้ (Feasible) และมีเงื่อนไขขอบเขตเป็น

$$\begin{aligned} \left[F - \sum_{k=1}^p \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial x_i} \right]_{t_f} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_0} = 0 \quad i = 1, \dots, n \\ \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i + \sum_{k=1}^p \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial t} \right]_{t_f} = 0; \quad \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_0} = 0 \end{aligned} \quad (2.47)$$

2.9.3 ฟังก์ชันเงื่อนไขบังคับทั่วไป (General Constraints)

จากหัวข้อ (2.9.1 และ 2.9.2) เราสามารถเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functional) $J[x_1, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt$ ได้โดยที่ฟังก์ชัน $x_i(t)$ สอดคล้องกับ

ฟังก์ชันอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Equality constraints) $g_j(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = 0$ เมื่อ $j=1, \dots, m$ โดย $m < n$ เสมอ และสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับที่จุดสุดท้าย (End point constraints) $s_k(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} = 0, k=1, \dots, p$ โดย $p < m$ เสมอ ดังนั้นเมื่อใช้เทคนิควิธีลากรางจ์มัลติพลีเออร์ (Lagrange multiplier) ก็จะได้ฟังก์ชันนอล (Functional) ใหม่เป็น

$$J'[x_1, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} \left[F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) g_j(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \right] dt + \sum_{k=1}^p v_k s_k \quad (2.48)$$

เมื่อ $\lambda_j(t)$ และ v_k คือลากรางจ์มัลติพลีเออร์ (Lagrange multiplier) ดังนั้นหากกรณีปัญหาเป็นแบบเวลาสุดท้ายและจุดสุดท้ายแปรผันได้ (Variable end time and end points) ก็จะสามารถดัดแปลงสมการได้เป็น

$$\delta J' = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F'}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i dt + \sum_{i=1}^n \left[\left\{ \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{k=1}^p v_k \frac{\partial s_k}{\partial x_i} \right\} \delta x_i \right]_{t_f} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right)_{t_0} + \left[F' - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i + \sum_{k=1}^p v_k \frac{\partial s_k}{\partial t} \right]_{t_f} \delta t_f \quad (2.49)$$

$$- \left[F' - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_0} \delta t_0 \quad (2.50)$$

เมื่อ $F' = F + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j$

ทำให้ได้เงื่อนไขจำเป็น (Necessary conditions) สำหรับเอ็กทรีมัม (Extremum) ดังนี้

$$\frac{\partial F'}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} = 0$$

$$\left[\frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{k=1}^p v_k \frac{\partial s_k}{\partial x_i} \right]_{t_f} = 0 \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_0} &= 0, i = 1, \dots, n \\ \left[F' - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i + \sum_{k=1}^p \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial t} \right]_{t_f} &= 0 \\ \left[F' - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_0} &= 0 \end{aligned} \quad (2.52)$$

โดยที่ $g_j = 0, j = 1, \dots, m$ และ $s_k = 0, k = 1, \dots, p$ จึงจะทำให้ได้คำตอบที่เป็นที่ยอมรับได้

2.10 การแก้ปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชันด้วยแคลคูลัสออฟวาไรเอเบิล

(Calculus of Variation with Dynamic Optimization)

จากที่กล่าวมาแล้วในส่วนของแคลคูลัสออฟวาไรเอเบิล (Calculus of variation) นั้นพบว่าประโยชน์อย่างมากกับการนำมาแก้ปัญหาทางด้านไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) ดังนั้นต่อไปนี้จะมาดูวิธีการนำเอาแคลคูลัสออฟวาไรเอเบิล (Calculus of variation) มาใช้แก้ปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) ดังนี้

2.10.1 เวลาสุดท้ายถูกกำหนดไว้ตายตัว (Fixed Final Time)

ลักษณะเช่นนี้ถือว่าเป็นลักษณะที่ถือว่าธรรมดาทั่วไปแต่ต้องเป็นระบบที่เข้าข่ายดังนี้คือ มีรูปแบบการระบุปัญหาโดยสมการ (2.11), มีลักษณะของคอสฟังก์ชันนอล (Cost Functional) ดังสมการ (2.12), เวลาเริ่มต้นและเวลาสุดท้ายคือ t_0 และ t_f ถูกกำหนดไว้ตายตัว (Fixed end time) และระบบจะเริ่มต้นไว้แล้ว $x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)$ ตามลำดับ ตัวอย่างเช่น รถไฟที่วิ่งระหว่างเมืองสองเมืองที่มีกำหนดเวลาออกและเวลาถึงสถานีไว้ตายตัวแล้ว ซึ่งออปเจกทีฟฟังก์ชัน (Objective function) อาจจะเป็นการสิ้นเปลืองพลังงานเชื้อเพลิงที่น้อยที่สุดก็ได้ ซึ่งเราจะกล่าวถึงลักษณะของปัญหาที่พบในงานด้านไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) 3 ลักษณะด้วยกัน คือ สภาวะสุดท้าย $x_1(t_f), \dots, x_n(t_f)$ ถูกกำหนดไว้ตายตัว, สภาวะสุดท้าย $x_1(t_f), \dots, x_n(t_f)$ ถูกกำหนดไว้ตายตัวแต่มีเงื่อนไขบังคับ (Constraints) และสุดท้ายคือคอนโทรลวาไรเอเบิลและสเตตวาไรเอเบิล (Control variables and state variables) ต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับตลอดเวลา

2.10.2 เวลาสุดท้ายแปรผัน (Variable Final Time)

ลักษณะเช่นนี้มีลักษณะคล้ายกับหัวข้อ (2.7.4) เพียงแต่ที่เวลาสุดท้าย t_f แปรผันได้ แต่ต้องมีรูปแบบการระบุปัญหาโดยสมการ (2.11), มีลักษณะของคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) ดังสมการ (2.12), เวลาเริ่มต้นคือ t_0 ถูกกำหนดไว้ตายตัว (Fixed start time) แต่เวลาสุดท้าย t_f มีการแปรผัน (Variable end time) และมีการระบุสถานะเริ่มต้นไว้แล้ว $x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)$ ตามลำดับ เช่น การแข่งรถเป็นต้น จะกล่าวถึงลักษณะของปัญหาที่พบในงานด้านไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) 3 ลักษณะด้วยกัน คือ สภาวะสุดท้าย $x_1(t_f), \dots, x_n(t_f)$ ถูกกำหนดไว้ตายตัว, สภาวะสุดท้าย $x_1(t_f), \dots, x_n(t_f)$ ถูกกำหนดไว้ให้เป็นไปตามเงื่อนไขบังคับ (Constraints) และสุดท้ายคือคอนโทรลวารีเอเบิลและสเตตวารีเอเบิล (Control variables and state variables) ต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับตลอดเวลาการเคลื่อนที่ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

2.10.3 สภาวะสุดท้ายถูกกำหนดไว้ตายตัว (Final States are Prescribed)

ปัญหานี้มีฟังก์ชันนอล (Functional) เป็น

$$J'[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] = \Phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.53)$$

เมื่อ

$$L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) [f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) - \dot{x}_i] \quad (2.54)$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ คือลากรางจ์มัลติพลีเออร์ (Lagrange Multipliers) ด้วยการกำหนดเวลาและสภาวะเริ่มต้น รวมทั้งระบุสภาวะสุดท้ายไว้ ดังนั้นจะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันดังนี้

$$\begin{aligned} \delta J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j} dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k} dt \\ & + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \delta u_k \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \delta u_k \Big|_{t_0} \right) \\ & + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + L' - \sum_{j=1}^n \dot{x}_j \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} - \sum_{k=1}^m \dot{u}_k \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right]_{t_f} \delta t_f \end{aligned} \quad (2.55)$$

เมื่อเราทำการประเมินค่าแต่ละส่วนในสมการ ก็จะทำให้เราสามารถหาเงื่อนไขจำเป็น (Necessary Conditions) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\lambda_j &= -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, j=1, \dots, n \\ \frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} &= 0, k=1, \dots, m \\ \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + L + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \right]_{t_f} &= 0\end{aligned}\quad (2.56)$$

ผลเฉลยของสถานะ (States) $x_j(t)$, ลากรางันซ์มัลติพลีเออร์ (Lagrange multipliers) $\lambda_j(t)$ (บางครั้งเรียกโคสเตต (Costates)), คอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_k(t)$ และเวลาสุดท้าย t_f สามารถหาค่าได้โดยการใช้สเตตอีควชัน (State equations) คือสมการ (2.11) จำนวน n สมการ, โคสเตตอีควชัน (Costate equations) คือสมการ (2.56) จำนวน n สมการ และเอ็ดดิชันนอลอีควชันคือสมการ (2.56) จำนวน m สมการและสมการเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) คือสมการ (2.56) ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First order different equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary equations) จำนวน $m+1$ สมการ ในการหาผลเฉลยนี้มีความจำเป็นต้องมีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสถานะที่เวลา t_0 และ t_f ด้วย

2.11 สรุปเกี่ยวกับไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic Optimization Conclusion)

ปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) มีจุดเริ่มต้นจากสมการการเคลื่อนที่ก็คือ $\sum F = ma = m\dot{x}$ แต่ในการแก้ปัญหาด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์นั้นไม่สะดวกถ้าสมการมีรูปแบบเป็นสมการกำลังสองดังกล่าว ดังนั้นจึงนิยามจัดรูปสมการเป็นกำลังหนึ่งคือ $\dot{x}_1 = x_2$ และ $\dot{x}_2 = \sum F/m$ ดังสมการ (2.11) คือ

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t), i=1, \dots, n \quad (2.57)$$

ปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) นั้น จะมีการกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขตเสมอ (Initial and boundary conditions) และอาจจะมีการเพิ่มเงื่อนไขบังคับ (Constraints) เข้าไปด้วย แล้วจึงกำหนดคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) ว่าต้องการค่าน้อยสุดหรือมากที่สุด ดังนี้

$$J = \Phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.58)$$

โดยที่คอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) มีสองส่วนก็คือ $\Phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f}$ ซึ่งเรียกว่า เทอร์มินอลเทอม (Terminal term) และ $\int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt$ ซึ่งเรียกว่า อินทิกรัลเทอม (Integral term) ซึ่งหากกำหนด $L = \sum_{i=1}^m u_i^2$ จะเรียกว่าปัญหาพลังงานน้อยสุด (Minimum energy), หากกำหนด $L = \sum_{i=1}^m |u_i|$ จะเรียกว่าปัญหาเชื้อเพลิงน้อยสุด (Minimum fuel), หากกำหนด $\Phi = t_f$ จะเรียกว่าปัญหาเวลาน้อยสุด (Minimum time) และหากกำหนด $\Phi = x_2(t_f)$ จะเรียกว่าปัญหาความเร็วสูงสุด (Maximum velocity) เป็นต้น ซึ่ง Φ และ L จะเรียกว่า สภาวะของปัญหา (State of the problem) และสามารถแก้ปัญหได้ด้วยเทคนิคทางตัวเลข (Numerical techniques) มีสองลักษณะใหญ่คือ วิธีโดยตรง (Direct methods) และวิธีอ้อม (Indirect methods) โดยอาศัยหลักการของแคลคูลัสของแปรผัน (Calculus of variations) ทำให้สามารถเขียนคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) โดยทั่วไปที่มีลากรางจ์มัลติพลีเออร์ (Lagrange multiplier) ν_i , λ_i และ μ_i เข้ามาเกี่ยวข้องได้ดังนี้คือ

$$J = \Phi + \sum_{l=1}^q \nu_l s_l + \int_{t_0}^{t_f} L + \sum_{i=1}^n \lambda_i (\dot{x}_i - f_i) + \sum_{i=1}^r \mu_i g_i + \sum_{i=1}^p \mu_i (c_i + s_i^2) dt \quad (2.59)$$

$$J' = \Phi' + \int_{t_0}^{t_f} L' dt$$

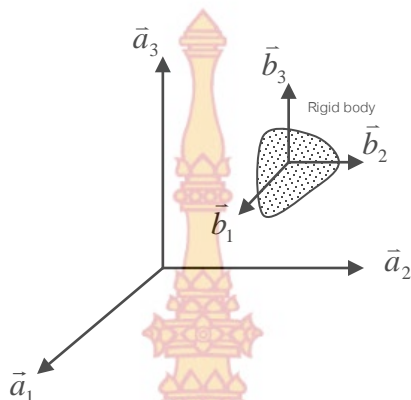
$$\Phi' = \Phi + \sum_{l=1}^q \nu_l s_l \quad (2.60)$$

เมื่อ

$$L' = L + \sum_{i=1}^n \lambda_i (\dot{x}_i - f_i) + \sum_{i=1}^r \mu_i g_i + \sum_{i=1}^p \mu_i (c_i + s_i^2)$$

สมการดังกล่าวนี้นำไปใช้กับปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) ได้ทุกปัญหา เพราะได้รวมเอาเงื่อนไขบังคับเชิงเท่ากับและเชิงเปรียบเทียบ (Equality and inequality constraints) เข้าไว้ด้วยกันแล้ว เพียงแค่ตัดเทอมที่ไม่มีในปัญหานั้นๆ ออกก็จะได้รูปสมการตามโจทย์ของปัญหานั้นๆ นั้นเอง

2.12 ความเร็วเชิงมุม (Angular Velocity)



รูปท 2.1 แสดงการเคลื่อนที่ของความเร็วเชิงมุม

กำหนดให้ b_1, b_2, b_3 ตามกฎมือขวาที่ตั้งฉากซึ่งกันและกันกำหนดหน่วยของเวกเตอร์วัตถุ B เคลื่อนที่โดยอ้างอิงเฟรม A ความเร็วเชิงมุม B ในเฟรม A กำหนดการแทนค่าเป็น ${}^A\omega^B$ ซึ่งเขียนสมการได้ดังนี้

ปริมาณเวกเตอร์เขียนอยู่ในรูป ω

$${}^A\omega^B \triangleq b_1 \frac{{}^A dB_2}{dt} \cdot b_3 + b_2 \frac{{}^A dB_3}{dt} \cdot b_1 + b_3 \frac{{}^A dB_1}{dt} \cdot b_2 \quad (2.61)$$

และลดรูปของสมการในแบบสมการ Differential

$$\begin{aligned} {}^A\omega^B &\triangleq b_1 \dot{b}_2 \cdot b_3 + b_2 \dot{b}_3 \cdot b_1 + b_3 \dot{b}_1 \cdot b_2 \\ {}^A\omega^B \times b_1 &= b_2 \times b_1 \dot{b}_3 \cdot b_1 + b_3 \times b_1 \dot{b}_1 \cdot b_2 \\ {}^A\omega^B \times b_1 &= -b_3 \dot{b}_3 \cdot b_1 + b_2 \dot{b}_1 \cdot b_2 \end{aligned} \quad (2.62)$$

Differentiation เทียบกับเวลา $b_1 \cdot b_1 = 1$ และ $b_3 \cdot b_1 = 0$ จะได้ว่า

$$\dot{b}_1 \cdot b_1 = 0 \quad \dot{b}_3 \cdot b_1 = -\dot{b}_1 \cdot b_3 \quad (2.63)$$

และเขียนสมการใหม่ได้

$${}^A\omega^B \times b_1 = b_1 \dot{b}_1 \cdot b_1 + b_2 \dot{b}_1 \cdot b_2 + b_3 \dot{b}_1 \cdot b_3 \quad (2.64)$$

แต่ในสมการของกฎมือขวาสามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการของ

$${}^A\omega^B \times b_1 = \dot{b}_1 \quad {}^A\omega^B \times b_2 = \dot{b}_2 \quad {}^A\omega^B \times b_3 = \dot{b}_3 \quad (2.65)$$

และเวกเตอร์ใดๆในเฟรม B กำหนดให้ β เป็น ความเร็วเชิงมุมเขียนสมการได้

$$\begin{aligned} \beta &= \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \beta_3 b_3 \\ \beta_1, \beta_2, \beta_3 &\text{ คงที่} \\ \dot{\beta} &= \beta_1 \dot{b}_1 + \beta_2 \dot{b}_2 + \beta_3 \dot{b}_3 \\ \dot{\beta} &= \beta_1 {}^A\omega^B \times b_1 + \beta_2 {}^A\omega^B \times b_2 + \beta_3 {}^A\omega^B \times b_3 \\ &= {}^A\omega^B \times (\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \beta_3 b_3) = {}^A\omega^B \times \beta \end{aligned} \quad (2.66)$$

2.12.1 รูปแบบของปริมาณความเร็วเชิงมุม(Simple Angular Velocity)

ในที่นี้จะกล่าวถึงเฟรมของไจโรสโคป (Gyroscope) ซึ่งจากรูปมี 4 เฟรม คือ A,B,C,D สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของปริมาณความเร็วเชิงมุมได้ดังนี้

$${}^A\omega^B = \dot{q}_1 b \quad (2.67)$$

$${}^B\omega^C = \dot{q}_2 c \quad (2.68)$$

$${}^C\omega^D = -\dot{q}_3 d \quad (2.79)$$

2.12.2 ความเร่งเชิงมุม (Angular Acceleration)

ความเร่งเชิงมุมสามารถทำให้อยู่ในรูปของ ${}^A\alpha^B$ ซึ่งหมายความว่าความเร่งของวัตถุ B อ้างอิงจากเฟรม A

โดยที่

$${}^A\alpha^B = \frac{{}^A d {}^A\omega^B}{dt} = \frac{{}^B d {}^A\omega^B}{dt} \quad (2.70)$$

แต่

$${}^A\alpha^D \neq {}^A\alpha^B + {}^B\alpha^C + {}^C\alpha^D \quad (2.71)$$

สามารถเขียนสมการได้

$${}^A\omega^{A_1} = \dot{q}_1 k_2 \quad (2.72)$$

$${}^A\omega^{A_2} = \dot{q}_2 k_7 \quad (2.73)$$

$${}^{A_2}\omega^B = \dot{q}_3 k_3 \quad (2.74)$$

$${}^A\alpha^B = \frac{{}^A d}{dt} ({}^A\omega^{A_1} + {}^{A_1}\omega^{A_2} + {}^{A_2}\omega^B) \quad (2.75)$$

$$= \frac{{}^A d}{dt} (\dot{q}_1 k_2 + \dot{q}_2 k_7 + \dot{q}_3 k_3) \quad (2.76)$$

2.2.12.3 ฟังก์ชันเงื่อนไขของรูปแบบ(Configuration Constraints)

Rheonomic $f(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0$ คือฟังก์ชันเงื่อนไขที่ขึ้นกับเวลา
โดยที่

$$\vec{P}_1 \cdot \vec{b}_z = 0, \vec{P}_2 \cdot \vec{b}_z = 0 \quad (2.77)$$

Scleronomic $f(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0$ คือ constraints ที่ไม่ขึ้นกับเวลา
โดยที่

$$\|\vec{P}_2 - \vec{P}_1\| = L \quad (2.78)$$

2.12.4 รูปแบบสถานะทั่วไป(Generalized Coordinates)

สมการฟังก์ชันเงื่อนไขแบบฮอโลโนมิก (Holonomic constraint equation)

$$n \triangleq 3v - M \quad (2.79)$$

โดยที่ n = holonomic constraints

v = จำนวน degree of freedom

M = เงื่อนไขบังคับ

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

1. การกำหนดปัญหา (State of the problem)
2. การแก้ปัญหาเชิงตัวเลข (Numerical methods)

1. การกำหนดปัญหา (State of the Problem)

ในการออกแบบการเคลื่อนที่ของโรโบติกนั้น จะทำการกำหนดและทำการเก็บค่าการเคลื่อนที่ของวงสวิงต้นแบบ ซึ่งทำการคัดเลือกจากวงสวิงของนักกอล์ฟที่มีวงสวิงที่สวย ได้ระยะที่ไกลและทิศทางที่ตรงเป้าหมายมาเป็นต้นแบบในการเคลื่อนที่ของโรโบติก โดยทำการเขียนโปรแกรมซึ่งนำไปใช้กับชุดฝึกซ้อมวงสวิงเพื่อทำการกำหนดเส้นทางการเคลื่อนที่ของไม้กอล์ฟ (Constraint Path) จากสิ่งที่ได้กำหนดมานั้น ปัญหาที่จะเกิดขึ้นตามมาคือขอบเขต (Boundary) ที่เกิดจากจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุด (Two Point Boundary Value Problem) โดยจะต้องทำการแก้ปัญหาแบบ DAE (Differential Algebra Equation) โดยที่ ต้องกำหนดสมการขึ้นมาเพื่อแก้ปัญหาโดยที่กำหนดให้

$$J = \int_{t_0}^{t_f} (T_1^2 + T_2^2 + T_3^2) dt \quad (3.1)$$

จากรูปแบบสมการซึ่งจัดให้อยู่ในรูปแบบของสมการออปติไมซ์เซชัน (Optimization Equation) โดยที่ Functional $J =$ ค่าพลังงานของระบบที่ใช้ให้น้อยที่สุด (minimum energy) ออปติไมซ์เซชัน (Optimization) เป็นตัวกำหนดความเร็วการหมุนของโรโบติกทั้ง 3 แกน ซึ่ง จะทำการควบคุมค่าแรงบิด (Torque) ในช่วงเวลาและทิศทางที่เหมาะสมในการควบคุมตำแหน่งของเวลา ณ จุดใดๆ ในทางตรงกันข้ามในกรณีที่มีแรงกระทำในทิศทางที่นอกเหนือทิศทางที่กำหนดหรือในช่วงเวลาที่ไม่เหมาะสมซึ่งทำให้โรโบติกไม่อยู่ในตำแหน่งที่กำหนดไว้ นั้นจะทำให้เกิดแรงต้านจากแนวแกนซึ่งเป็นค่าแรงบิด (Torque) ของโรโบติก

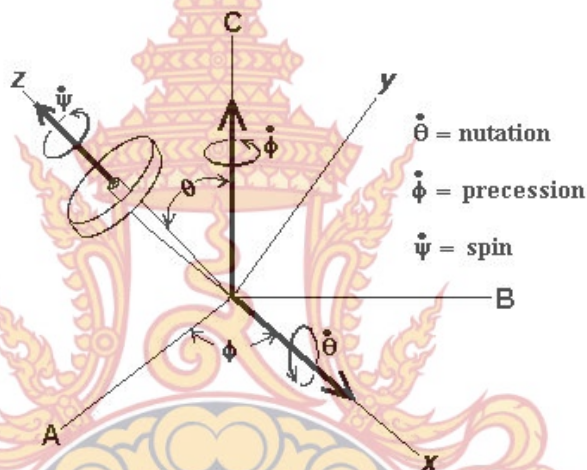
2. การแก้ปัญหาเชิงตัวเลข (Numerical Methods)

ทำการหาค่าแรงบิดในตำแหน่งต่างๆของ $T_{1x1}, T_{2x2}, T_{3x3}$ ในแต่ละแกนของทิศทางการเคลื่อนที่ของไจโรสโคปโดยใช้สมการของ Euler's Dynamic Equation

$$A\ddot{\theta} + C_1\dot{\theta} + H_0\dot{\psi} = T_{1x1} \quad (3.2)$$

$$B\ddot{\psi} + C_2\dot{\psi} - H_0\dot{\theta} = T_{2y2} \quad (3.3)$$

$$(C + D_1 \cos^2 \psi + D_2 \sin^2 \psi)\ddot{\phi} + \{C_3 + (D_2 - D_1)\dot{\psi} \sin \psi \cos \psi\}\dot{\phi} = -T_{1x1} \sin \psi - T_{3z3} \quad (3.4)$$



รูปที่ 3.1 แสดงการเคลื่อนที่ของ Gyroscope ในแนวแกน X,Y,Z

โดยสามารถกำหนดตัวแปรต่างๆดังนี้

A = moment of inertia ที่อยู่ในแนวแกน OX	กำหนดให้มีค่า = 1
B = moment of inertia ที่อยู่ในแนวแกน OY	กำหนดให้มีค่า = 1
C = moment of inertia ที่อยู่ในแนวแกน OZ	กำหนดให้มีค่า = 1
C_1 = ค่า Viscous friction coefficient ของ OX	กำหนดให้มีค่า = 1
C_2 = ค่า Viscous friction coefficient ของ OY	กำหนดให้มีค่า = 1
C_3 = ค่า Viscous friction coefficient ของ OZ	กำหนดให้มีค่า = 1
D_1 = ค่า Moment of inertia ที่เกิดจากค่า Gimbal ในแนวตั้ง	กำหนดให้มีค่า = 1
D_2 = ค่า Moment of inertia ที่เกิดจากค่า Gimbal ในแนวตั้ง	กำหนดให้มีค่า = 1
H_0 = spin angular momentum ของ Gyro-rotor ที่จุด center	กำหนดให้มีค่า = 1
$T_{1x1}, T_{2x2}, T_{3x3}$ = ค่า แรงบิด(Torque) ในแนวแกน	

จากแนวคิดและรูปแบบของปัญหาของสมการ Euler's Dynamic Equation ผู้ทำการวิจัยได้ทำการเปลี่ยนแปลงสมการ Euler's Dynamic Equation แต่คงไว้ซึ่งพื้นฐานของสมการเดิมโดยที่ทำการปรับเปลี่ยนเพื่อให้เหมาะสมกับการใช้งานทางในรูปของสมการออปติไมซ์เซชัน (Optimization Equation) เพื่อทำการวิเคราะห์และคำนวณหาค่าของทิศทางและตำแหน่งของวงสวิง ซึ่งจากที่กล่าวมาผู้วิจัยได้ทำการเปลี่ยนรูปแบบของสมการใหม่ได้ดังนี้ โดยกำหนดให้

$$x_1 = \theta \quad (3.5)$$

$$x_2 = \psi \quad (3.6)$$

$$x_3 = \phi \quad (3.7)$$

$$\dot{x}_1 = x_4 \quad (3.8)$$

$$\dot{x}_2 = x_5 \quad (3.9)$$

$$\dot{x}_3 = x_6 \quad (3.10)$$

$$\dot{x}_4 = T_1 - x_5 \quad (3.11)$$

$$\dot{x}_5 = T_2 - x_4 \quad (3.12)$$

$$\dot{x}_6 = \frac{T_1 \sin(x_2) - T_3 - x_5 \sin(x_2) \cos(x_2) x_6}{(2 + \sin^2(x_2))} \quad (3.13)$$

จากสมการ(3.2) (3.3) (3.4) ผู้วิจัยได้ทำการเปลี่ยนรูปให้อยู่ในสมการที่ใช้ในออปติไมซ์เซชัน (Optimization Equation) โดยขั้นตอนต่อไปเมื่อได้ค่า T_1, T_2, T_3 ซึ่งเป็นค่าแรงบิดของมอเตอร์ จากนั้นผู้วิจัยทำการกำหนดให้อยู่ในรูปของปัญหาทาง Optimization โดยคอสฟังก์ชันนอล (Cost Functional) คือ J เป็นค่าพลังงานของระบบที่ใช้น้อยที่สุด (minimum energy)

$$J = \int_{t_0}^{t_f} (T_1^2 + T_2^2 + T_3^2) dt \quad (3.14)$$

t_f = ข้อมูลของเวลาการตีของนักกอล์ฟ

t_0 = จุดเริ่มต้นของวงสวิงกำหนดให้เริ่มจากจุดที่ไม่อยู่กับลูกกอล์ฟ

โดยผู้วิจัยจะทำการหามุมทั้ง 3 ได้ $\alpha, \beta, \gamma(t)$ โดยที่ใช้หลักการของเวกเตอร์

$$\text{จาก } \vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k} \quad (3.15)$$

ซึ่งแสดงถึงทิศทางของแรงรวมและทำการเปลี่ยนรูปของสมการโดยให้อยู่ในรูปของขนาดของเวกเตอร์

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \quad (3.16)$$

ผู้วิจัยทำการแทนค่าแรงบิดให้อยู่ในรูปแบบของเวกเตอร์เพื่อทำการหาทิศทางการเคลื่อนที่ของใจโรสโคปโดยทำการกำหนดค่าของเวกเตอร์แรงบิดรวม $\vec{T}_{tot} = \vec{T}_3 + \vec{T}_2 + \vec{T}_1$ ดังนี้

$$\vec{T}_1 = T_1 \vec{k} \quad (3.17)$$

$$\vec{T}_{12} = T_1 \cos \psi \vec{i} - T_1 \sin \psi \vec{k} + T_2 \vec{j} \quad (3.18)$$

$$\vec{T}_{123} = T_1 \cos \psi \vec{i} - (T_1 \sin \psi) \cos \phi \vec{j} - (T_1 \sin \psi) \sin \phi \vec{k} + T_2 \cos \phi \vec{j} + T_2 \sin \phi \vec{k} + T_3 \vec{i} \quad (3.19)$$

$$\vec{T}_{tot} = (T_1 \cos \psi + T_3) \vec{i} + (T_2 \cos \phi - T_1 \sin \psi \cos \phi) \vec{j} + (T_2 \sin \phi - T_1 \sin \psi \sin \phi) \vec{k} \quad (3.20)$$

แทนค่ามุมด้วยค่า x_1, x_2, x_3 ที่กำหนดไว้ $x_1 = \theta, x_2 = \psi, x_3 = \phi$

$$\begin{aligned} \vec{T}_{tot} = & (T_1 \cos(x_2) + T_3) \vec{i} + (T_2 \cos(x_3) - T_1 \sin(x_2) \cos(x_3)) \vec{j} \\ & + (T_2 \sin(x_3) - T_1 \sin(x_2) \sin(x_3)) \vec{k} \end{aligned} \quad (3.21)$$

ทำการเปลี่ยนรูปของสมการเพื่อทำการหามุมทั้ง 3 โดยทำการแก้สมการเพื่อหามุม α, β, γ ซึ่งก็คือมุม θ, ψ, ϕ ของสมการนั่นเอง โดยกำหนดให้เป็นเงื่อนไขบังคับ (Function Constraints)

$$\cos \alpha = \frac{v_1}{|v|} \Rightarrow X \mapsto axis \quad \alpha = \cos^{-1} \left[\frac{v_1}{|v|} \right] \quad (3.22)$$

$$\cos \beta = \frac{v_2}{|v|} \Rightarrow Y \mapsto axis \quad \beta = \cos^{-1} \left[\frac{v_2}{|v|} \right] \quad (3.23)$$

$$\cos \gamma = \frac{v_3}{|v|} \Rightarrow Z \mapsto axis \quad \gamma = \cos^{-1} \left[\frac{v_3}{|v|} \right] \quad (3.24)$$

$$\cos \alpha = \frac{T_1 \cos(x_2) + T_3}{\sqrt{(T_1 \cos(x_2) + T_3)^2 + (T_2 \cos(x_3) - T_1 \sin(x_2) \cos(x_3))^2 + (T_2 \sin(x_3) - T_1 \sin(x_2) \sin(x_3))^2}} \quad (3.25)$$

$$\cos \beta = \frac{(T_2 \cos(x_3) - T_1 \sin(x_2) \cos(x_3))}{\sqrt{(T_1 \cos(x_2) + T_3)^2 + (T_2 \cos(x_3) - T_1 \sin(x_2) \cos(x_3))^2 + (T_2 \sin(x_3) - T_1 \sin(x_2) \sin(x_3))^2}} \quad (3.26)$$

$$\cos \gamma = \frac{(T_2 \sin(x_3) - T_1 \sin(x_2) \sin(x_3))}{\sqrt{(T_1 \cos(x_2) + T_3)^2 + (T_2 \cos(x_3) - T_1 \sin(x_2) \cos(x_3))^2 + (T_2 \sin(x_3) - T_1 \sin(x_2) \sin(x_3))^2}} \quad (3.27)$$



บทที่ 4

การออกแบบวิธีการทดลอง

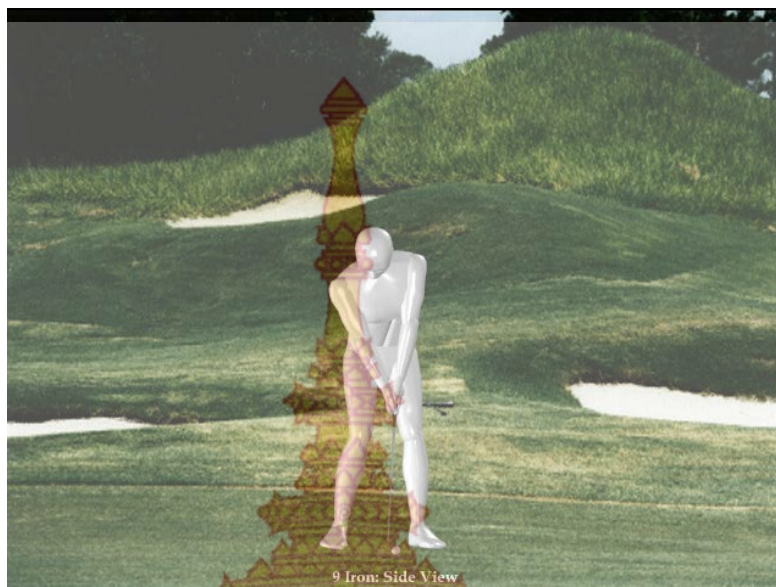
ในการออกแบบการทดลองจะต้องกำหนดวงสวิงและขนาดไม้กอล์ฟที่จะนำมาใช้ในการทดลองและทำการกำหนดค่าที่มีความสำคัญต่อการคำนวณ การกำหนดรูปแบบของวงสวิงนั้นผู้ทำการทดลองได้นำโปรแกรม Swing Maker มาใช้ในการทดลองโดยรูปแบบของโปรแกรมนั้นเป็นวงสวิงมาตรฐานและสมบูรณ์แบบทั้งขนาดของไม้ที่มีหลายขนาดจากนั้นผู้ทำการทดลองจะได้ทำการกำหนดตำแหน่งความเร็วของวงสวิงและทำการวัดค่าองศาที่ตำแหน่งต่างๆจากนั้นผู้ทำการทดลองจะได้นำค่าที่ได้นั้นมาทำการคำนวณทางคณิตศาสตร์โดยใช้โปรแกรม MATLAB 5.3 เพื่อให้ได้ค่าแรงบิดที่จะนำมาใช้กับไจโรสโคปเพื่อนำมาควบคุมไม้กอล์ฟในตำแหน่งต่างๆ โดยทำการจัดลำดับการทดลองดังนี้

1. การกำหนดรูปแบบของวงสวิง

ผู้ทำการทดลองได้ทำการกำหนดการใช้โปรแกรมที่จะใช้ทำการทดลองคือ Swing Maker เพื่อทำการกำหนดขนาดของไม้กอล์ฟโดยใช้หัวไม้หนึ่งและเหล็กเก้าเพื่อนำมากำหนดตำแหน่งทิศทางและองศาโดยทำการกำหนดจากทิศทางการมองจากด้านหน้า ด้านข้าง และด้านบน ดังรูปตัวอย่าง



รูปที่ 4.1 แสดงรูปตัวอย่างวงสวิงด้านหลัง



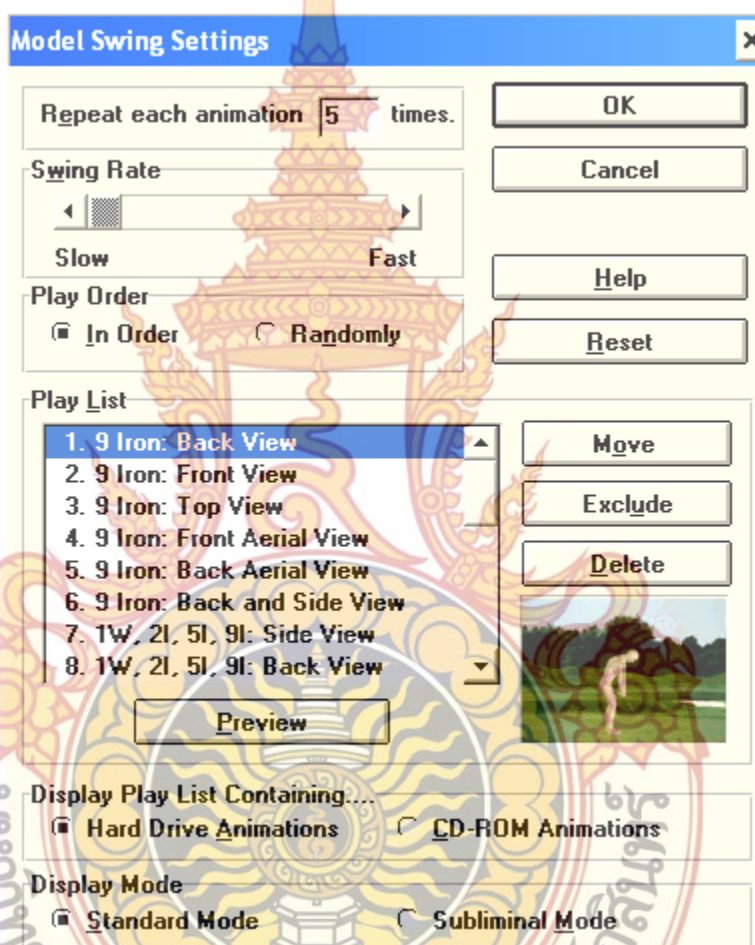
รูปที่ 4.2 แสดงรูปตัวอย่างวงสวิงด้านข้าง



รูปที่ 4.3 แสดงรูปตัวอย่างวงสวิงด้านบน

2. การกำหนดตำแหน่งการเคลื่อนที่

จากการเคลื่อนที่ของวงสวิงจากโปรแกรม Swing Maker ผู้ทำการทดลองได้ทำการกำหนดตำแหน่งโดยทำการจับเวลาการเคลื่อนที่ของวงสวิงในแต่ละด้านโดยแบ่งเป็นที่ 0 วินาที, 5 วินาที 10 วินาที, 12 วินาที, 14วินาที ตามลำดับโดยทำการวัดองศาของวงสวิงจากโปรแกรม Swing Maker Deluxe ที่ทำการปรับค่าความเร็วของวงสวิงมาที่ตำแหน่งช้าสุด



รูปที่ 4.4 แสดงรูปการปรับความเร็ววงสวิงของโปรแกรม Swing Maker

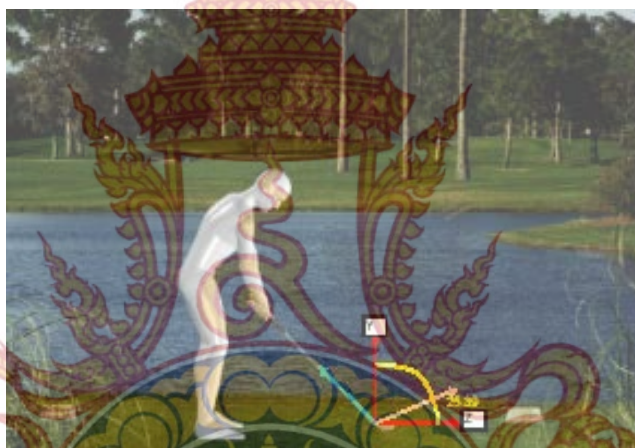
เมื่อทำการปรับความเร็วของวงสวิงแล้วขั้นตอนผู้ทำการทดลองจึงทำการเก็บข้อมูลโดยการเก็บรูปของวงสวิงจากโปรแกรมในแต่ละด้านและในแต่ละตำแหน่งของเวลาตามที่ผู้ทำการทดลองได้กำหนดไว้แล้วในข้างต้นต่อไป

3. การวัดองศาและวิธีการวัดค่า

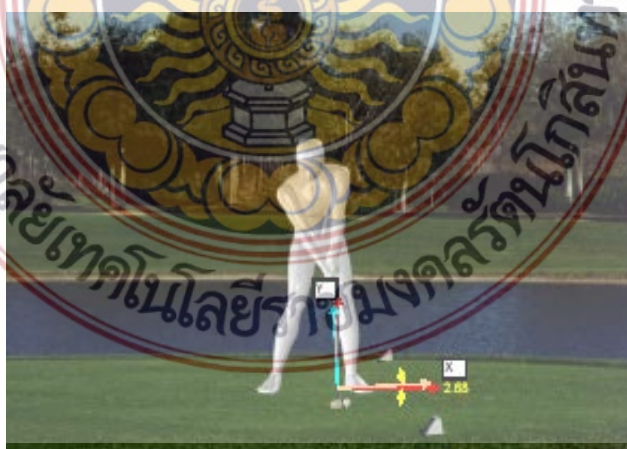
ผู้ทำการทดลองได้กำหนดตัวอย่างการทดลองไว้คือ เหล็ก 9 โดยทำการวัดองศาจากตำแหน่งต่างๆ ที่ได้กล่าวมาข้างต้นโดยใช้การวัดค่าจากโปรแกรม CAD 3D เนื่องจากผู้ทำการทดลองทำการวัดค่าด้านข้าง และด้านบน และนำค่าองศาทั้ง 2 ด้านมาทำการหาค่าด้านหลังโดยใช้โปรแกรม CAD 3D โดยในแต่ละตัวอย่างมีดังต่อไปนี้

การทดลองที่ใช้เหล็ก 9 (Iron 9)

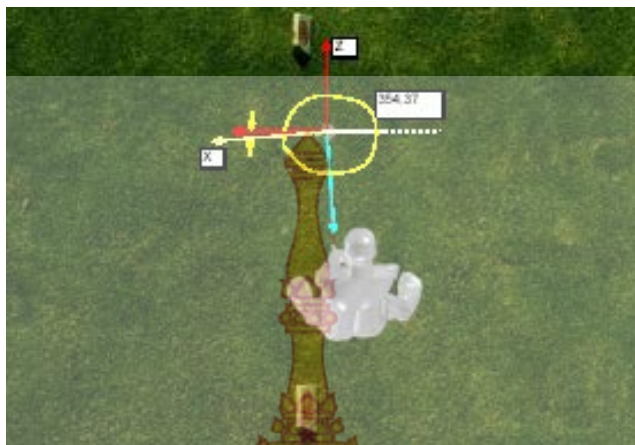
ทำการกำหนดเส้นทางการเคลื่อนที่ของไม้กอล์ฟ(Constraint Path)



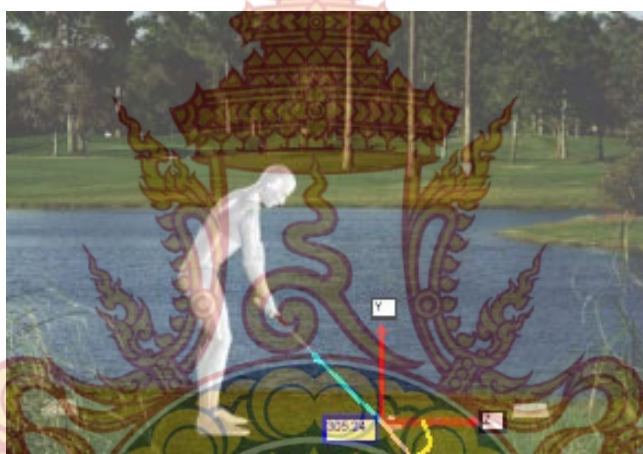
รูปที่ 4.5 แสดงตำแหน่งที่ 1 ช่วงเวลาที่ 0 วินาทีวัดองศา ในระนาบ YZ =25.39 องศา



รูปที่ 4.6 แสดงตำแหน่งที่ 1 ช่วงเวลาที่ 0 วินาทีวัดองศา ในระนาบ YX =2.68 องศา



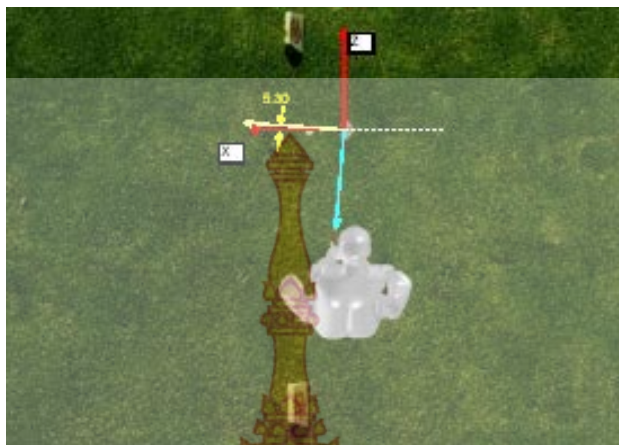
รูปที่ 4.7 แสดงตำแหน่งที่ 1 ช่วงเวลาที่ 0 วินาทีที่วัดองศา ในระนาบ ZX =354.37 องศา



รูปที่ 4.8 แสดงตำแหน่งที่ 2 ช่วงเวลาที่ 5 วินาทีที่วัดองศา ในระนาบ YZ =305.24 องศา



รูปที่ 4.9 แสดงตำแหน่งที่ 2 ช่วงเวลาที่ 5 วินาทีที่วัดองศา ในระนาบ YX =352.5 องศา



รูปที่ 4.10 แสดงตำแหน่งที่ 2 ช่วงเวลาที่ 5 วินาทีที่วัดองศา ในระนาบ ZX =5.3 องศา



รูปที่ 4.11 แสดงตำแหน่งที่ 3 ช่วงเวลาที่ 10 วินาทีที่วัดองศา ในระนาบ YZ =344.8 องศา



รูปที่ 4.12 แสดงตำแหน่งที่ 3 ช่วงเวลาที่ 10 วินาทีที่วัดองศา ในระนาบ YX =344.47 องศา



รูปที่ 4.13 แสดงตำแหน่งที่ 3 ช่วงเวลาที่ 10 วินาทีที่วัดองศา ในระนาบ ZX =45.78 องศา



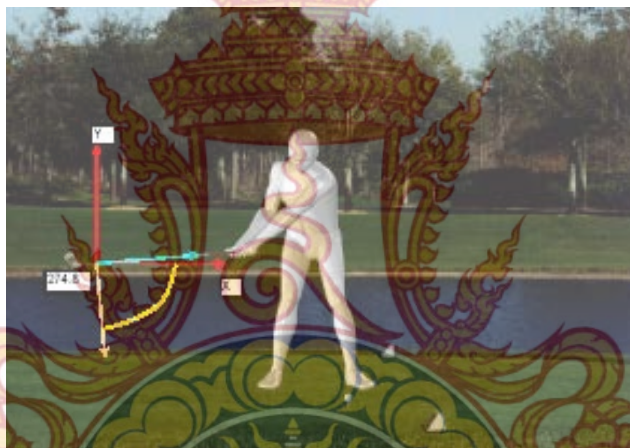
รูปที่ 4.14 แสดงตำแหน่งที่ 4 ช่วงเวลาที่ 12 วินาทีที่วัดองศา ในระนาบ YZ =321.3 องศา



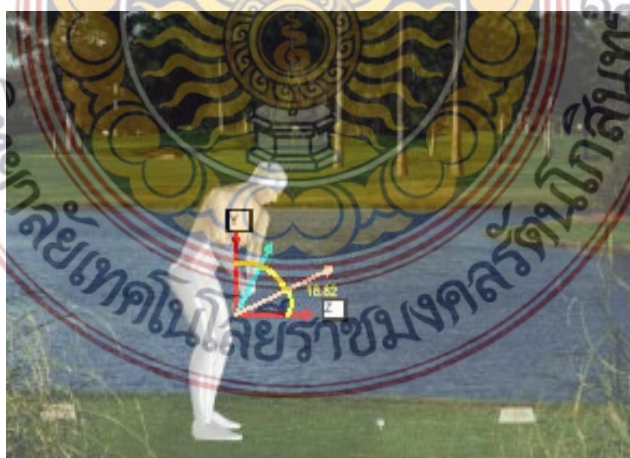
รูปที่ 4.15 แสดงตำแหน่งที่ 4 ช่วงเวลาที่ 12 วินาทีที่วัดองศา ในระนาบ YX =294.4องศา



รูปที่ 4.16 แสดงตำแหน่งที่ 4 ช่วงเวลาที่ 12 วินาทีที่วัดองศา ในระนาบ ZX =70 องศา



รูปที่ 4.17 แสดงตำแหน่งที่ 5 ช่วงเวลาที่ 14 วินาทีที่วัดองศา ในระนาบ YZ =18.82 องศา



รูปที่ 4.18 แสดงตำแหน่งที่ 5 ช่วงเวลาที่ 14 วินาทีที่วัดองศา ในระนาบ YX =274.8 องศา



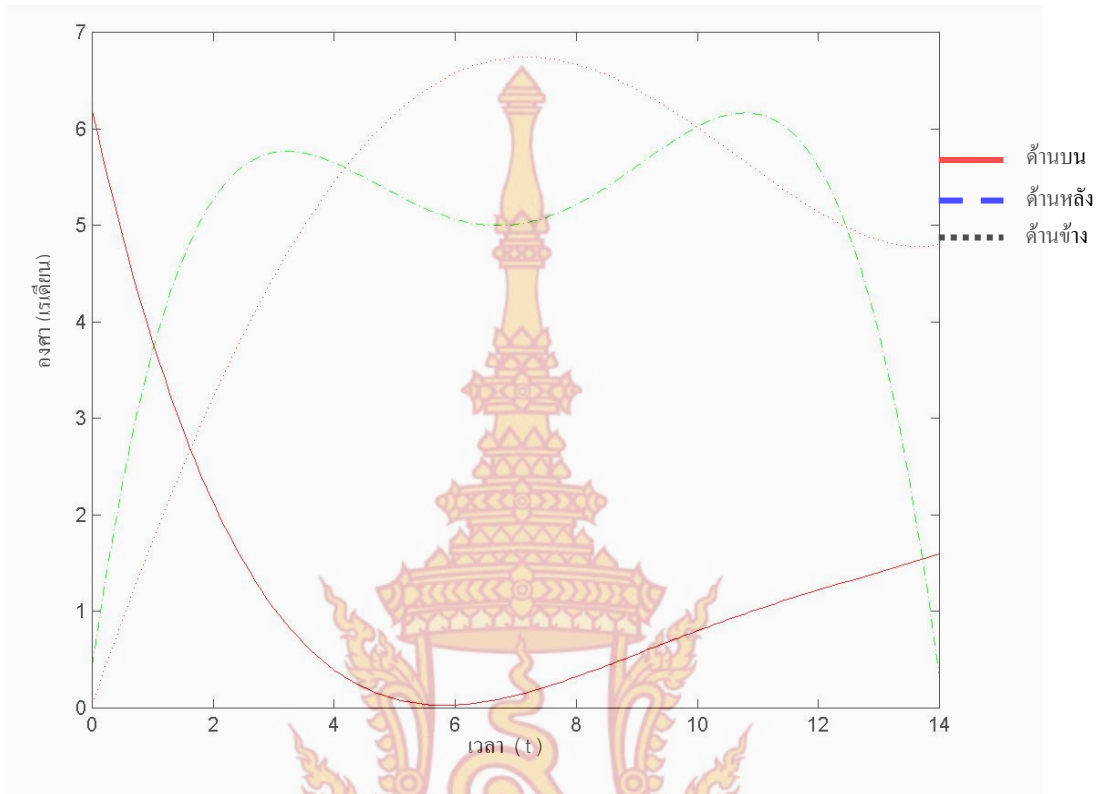
รูปที่ 4.19 แสดงตำแหน่งที่ 5 ช่วงเวลาที่ 14 วินาทีที่วัดองศา ในระนาบ ZX =91.64 องศา

จากรูปที่ 4.5 – 4.19 ซึ่งแสดงถึงตำแหน่งขององศาในเวลาที่แตกต่างกันในแต่ละด้าน ทางผู้ทำการวิจัยได้ทำการสรุปเป็นตารางเพื่อให้ง่ายต่อการนำไปใช้งาน

ตารางที่ 4.1 แสดงค่าองศาในด้านหลัง (Back view), ด้านข้าง (Side view), ด้านบน (Top view)

ตำแหน่ง หัวข้อ	เวลา วินาที	องศา		
		ด้านหลัง(θ)	ด้านข้าง(ψ)	ด้านบน(ϕ)
1	0	25.39	2.68	354.37
2	5	305.24	352.5	5.3
3	10	344.8	344.47	45.78
4	12	321.3	294.4	70
5	14	18.82	274.8	91.64

4. ผลการทดลอง



รูปที่ 22 กราฟแสดงการเคลื่อนที่ของวงสวิงด้านบน, ด้านข้าง, ด้านหลัง

ทำการกำหนดขอบเขต(Boundary condition) ของสมการ

$$x_1(t_0) = 0.4431 \text{ เรเดียน} \quad (4.1)$$

$$x_2(t_0) = 0.0468 \text{ เรเดียน} \quad (4.2)$$

$$x_3(t_0) = 6.1849 \text{ เรเดียน} \quad (4.3)$$

$$x_4(t_0) = 0 \quad (4.4)$$

$$x_5(t_0) = 0 \quad (4.5)$$

$$x_6(t_0) = 0 \quad (4.6)$$

ทำการหาทิศทางของการเคลื่อนที่ของใจโรสโคปโดยทำการหาเวกเตอร์รวมโดยใช้ค่าของ T_1, T_2, T_3 ซึ่งเป็นค่าแรงบิดของมอเตอร์ในแนวแกนที่ได้จากโปรแกรมนำมาแทนในเงื่อนไขบังคับ (Function Constraints)

$$\vec{T}_1 = T_1 \vec{k} \quad (4.7)$$

$$\vec{T}_{12} = T_1 \cos \psi \vec{i} - T_1 \sin \psi \vec{j} + T_2 \vec{j} \quad (4.8)$$

$$\vec{T}_{123} = T_1 \cos \psi \vec{i} - (T_1 \sin \psi) \cos \phi \vec{j} - (T_1 \sin \psi) \sin \phi \vec{k} + T_2 \cos \phi \vec{j} + T_2 \sin \phi \vec{k} + T_3 \vec{i} \quad (4.9)$$

$$\vec{T}_{tot} = (T_1 \cos \psi + T_3) \vec{i} + (T_2 \cos \phi - T_1 \sin \psi \cos \phi) \vec{j} + (T_2 \sin \phi - T_1 \sin \psi \sin \phi) \vec{k} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \vec{T}_{tot} &= (T_1 \cos(x_2) + T_3) \vec{i} + (T_2 \cos(x_3) - T_1 \sin(x_2) \cos(x_3)) \vec{j} \\ &+ (T_2 \sin(x_3) - T_1 \sin(x_2) \sin(x_3)) \vec{k} \end{aligned} \quad (4.11)$$

จาก $\vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \quad (4.12)$$

ทำการแก้สมการเพื่อหามุม α, β, γ

$$\cos \alpha = \frac{v_1}{|\vec{v}|} \Rightarrow X \mapsto axis \quad \alpha = \cos^{-1} \left[\frac{v_1}{|\vec{v}|} \right] \quad (4.13)$$

$$\cos \beta = \frac{v_2}{|\vec{v}|} \Rightarrow Y \mapsto axis \quad \beta = \cos^{-1} \left[\frac{v_2}{|\vec{v}|} \right] \quad (4.14)$$

$$\cos \gamma = \frac{v_3}{|\vec{v}|} \Rightarrow Z \mapsto axis \quad \gamma = \cos^{-1} \left[\frac{v_3}{|\vec{v}|} \right] \quad (4.15)$$

$$\cos \alpha = \frac{T_1 \cos(x_2) + T_3}{\sqrt{(T_1 \cos(x_2) + T_3)^2 + (T_2 \cos(x_3) - T_1 \sin(x_2) \cos(x_3))^2 + (T_2 \sin(x_3) - T_1 \sin(x_2) \sin(x_3))^2}} \quad (4.16)$$

$$\cos \beta = \frac{(T_2 \cos(x_3) - T_1 \sin(x_2) \cos(x_3))}{\sqrt{(T_1 \cos(x_2) + T_3)^2 + (T_2 \cos(x_3) - T_1 \sin(x_2) \cos(x_3))^2 + (T_2 \sin(x_3) - T_1 \sin(x_2) \sin(x_3))^2}} \quad (4.17)$$

$$\cos \gamma = \frac{(T_2 \sin(x_3) - T_1 \sin(x_2) \sin(x_3))}{\sqrt{(T_1 \cos(x_2) + T_3)^2 + (T_2 \cos(x_3) - T_1 \sin(x_2) \cos(x_3))^2 + (T_2 \sin(x_3) - T_1 \sin(x_2) \sin(x_3))^2}} \quad (4.18)$$

จากค่าองศาที่ได้จากการวัดนำมาทำการใส่ลงในสมการ Polynomial เพื่อหาค่าที่ต้องการคือ

T_1, T_2, T_3

แทนค่ามุมด้วยค่า x_1, x_2, x_3 ที่กำหนดไว้ $x_1 = \theta$, $x_2 = \psi$, $x_3 = \phi$

นำค่าองศาที่ได้แทนกลับไปในภาพประกอบ 4.20

$$x_1 = \theta \quad (4.19)$$

$$x_1 = 0.4431 + 4.3282t - 1.1958t^2 + 0.1283t^3 - 0.0041t^4 \quad (4.20)$$

$$x_2 = \psi \quad (4.21)$$

$$x_2 = 0.0468 + 1.767t - 0.0716t^2 - 0.0105t^3 + 0.0006t^4 \quad (4.22)$$

$$x_3 = \phi \quad (4.23)$$

$$x_3 = 6.1849 - 2.7987t + 0.4374t^2 - 0.0274t^3 + 0.0006t^4 \quad (4.24)$$

$$\dot{x}_1 = x_4 \quad (4.25)$$

$$x_4 = 4.3282 - 2.3916t + 0.3849t^2 - 0.0164t^3 \quad (4.26)$$

$$\dot{x}_4 = -2.3916 + 0.7698t - 0.0492t^2 \quad (4.27)$$

$$\dot{x}_2 = x_5 \quad (4.28)$$

$$x_5 = 1.767 - 0.1432t - 0.0315t^2 + 0.0024t^3 \quad (4.29)$$

$$\dot{x}_5 = -0.1432 - 0.063t + 0.0072t^2 \quad (4.30)$$

$$\dot{x}_3 = x_6 \quad (4.31)$$

$$x_6 = -2.7987 + 0.8748t - 0.0822t^2 + 0.0024t^3 \quad (4.32)$$

$$\dot{x}_6 = 0.8748 - 0.1644t + 0.0072t^2 \quad (4.33)$$

$$\dot{x}_4 = T_1 - x_5 \quad (4.34)$$

$$T_1 = -0.6246 + 0.6266t - 0.0807t^2 + 0.0024t^3 \quad (4.35)$$

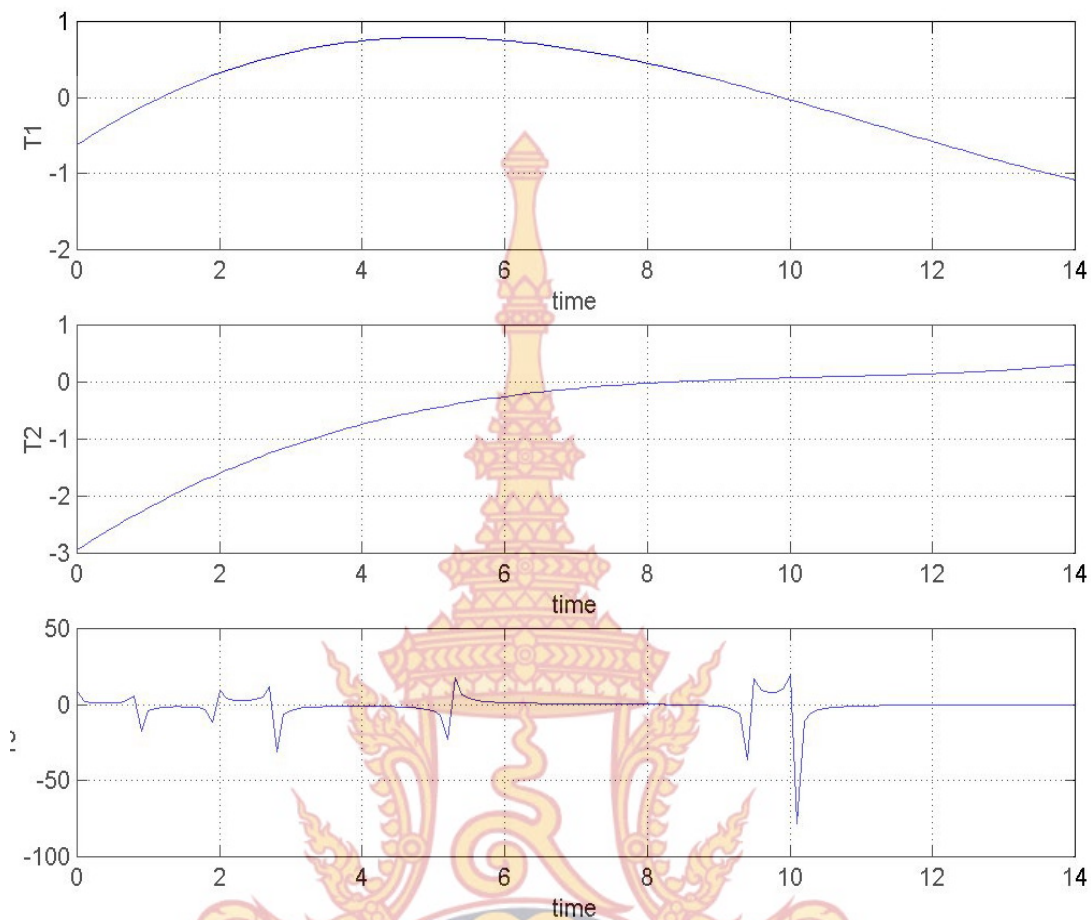
$$\dot{x}_5 = T_2 - x_6 \quad (4.36)$$

$$T_2 = -2.9419 + 0.8118t - 0.075t^2 + 0.0024t^3 \quad (4.37)$$

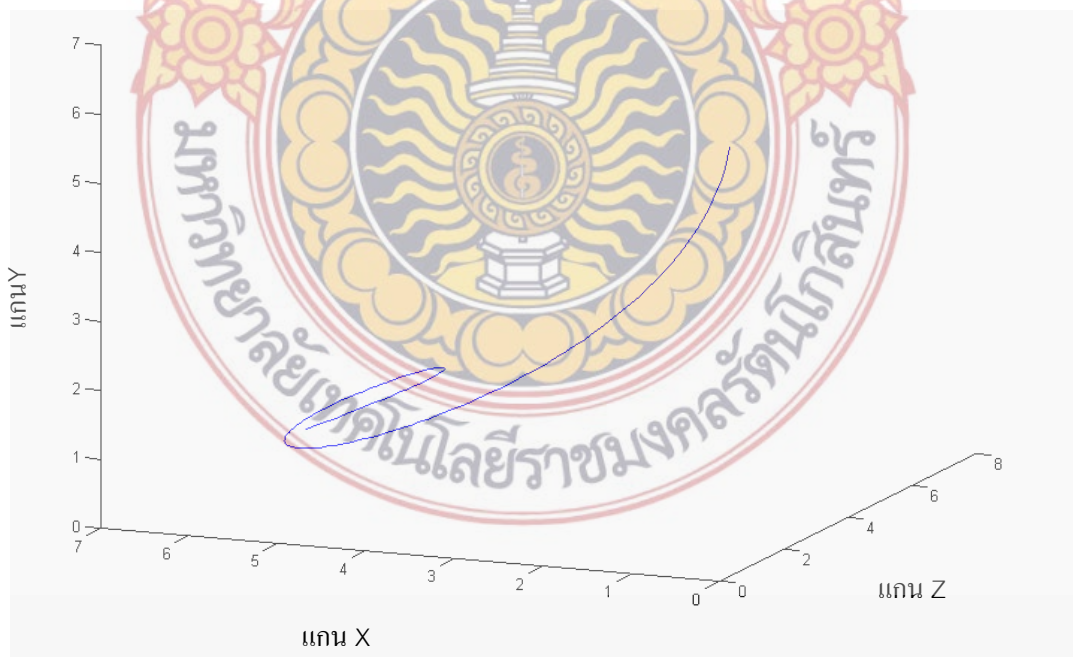
$$\dot{x}_6 = \frac{T_1 \sin(x_2) - T_3 - x_5 \sin(x_2) \cos(x_2) x_6}{(2 + \sin^2(x_2))} \quad (4.38)$$

$$T_3 = \frac{\dot{x}_6 (2 + \sin^2(x_2))}{T_1 \sin(x_2) - x_5 \sin(x_2) \cos(x_2) x_6} \quad (4.39)$$

จากสมการที่กล่าวมาข้างต้นผู้วิจัยได้ทำการใช้โปรแกรมทำการคำนวณหาค่า T_1, T_2, T_3 ซึ่งอยู่ในรูปของกราฟดังต่อไปนี้



รูปที่ 23 กราฟแสดงค่า T_1, T_2, T_3 ที่ออกจากโปรแกรม



รูปที่ 24 กราฟแสดงการเคลื่อนที่ของวงสวิงที่ออกจากโปรแกรม



บรรณานุกรม

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

บรรณานุกรม

- มนัส สังวรศิลป์, วิศว.ดร.; และ วรรัตน์ ภัทรอมรกุล. (2543). *คู่มือ MATLAB ฉบับสมบูรณ์*. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์อินโฟเพรส.
- สุธรรม ศรีเกษม, ฝศ.น.ท. ดร.; เมธินทร์ ทรงชัยกุล, น.ต. ; และสง่า ศรีสุภปริดา, ร.อ.. *MATLAB เพื่อการแก้ปัญหาทางวิศวกรรม*. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยรังสิต.
- Evtim V. Zahariev. (1997). *Dynamics and Optimization of Controlled Mechanical Systems*: Institute of Mechanics Bulgarian Academy of Sciences Acad. G. Bonchev Street, bl. 41113 Sofia, Bulgaria.
- Hsien-Keng Chen & Zheng-Ming Ge (2004) *Bifurcations and chaos of a two-degree-freedom dissipative gyroscope*.
- Kasahara M.S.; & et al. (2000, July). Analysis of a gyroscopic force measuring system in three-dimensional space. *Measurement*. 28(3) : 235–247.
- Veeraklaew. T. (1999). *Extensions of Optimization Theory and New Computational Approaches for Higher-order Dynamic Systems*. Dissertation Ph.D (Mechanical Engineering). Delaware: Graduate School of University of Delaware. Photocopied. [5]
- Singiresu S Rao. (1996). *Engineering Optimization Theory and Practice*. 3rd ed. USA : John Wiley & sons Inc.
- Sunil Kumar Agrawal, Brian C Fabien. (1999). *Optimization of Dynamic Systems*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Tan K.C.; & et al. (2001). *Design and real-time implementation of a multivariable gyro-mirror line-of-sight stabilization platform*. Department of Electrical & Computer Engineering, National University of Singapore.
- Xiong G.L.; & et al. (2003, May). Study of the gyroscopic effect of the spindle on the stability characteristics of the milling system. *Journal of Materials Processing Technology*. 138(8) : 379–384.
- Ying Z.G. & Zhu W.Q. (2003, July). Exact stationary solutions of stochastically excited and dissipated gyroscopic systems. *Journal of Materials Processing Technology*, 138(9) : 379–384.