การจำลองการสั่นสะเทือนที่เกิดจากแรงเสียดทานโดยใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์

โดย

ฤทธิพล จันทราษฎร์

สนับสนุนงบประมาณโดย

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลรัตนโกสินทร์

ประจำปีงบประมาณ 2557

The Simulation of Friction-Induced Vibration Using Finite Element Method

By
RITTIPOL CHANTARAT

Granted by
Rajamangala University of Technology Rattanakosin
Fiscal year 2014

กิตติกรรมประกาศ

จากการที่ผลงานวิจัยครั้งนี้สำเร็จลุล่วงลงด้วยดี ผู้วิจัยใคร่กราบขอบพระคุณ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลรัตนโกสินทร์ ที่ให้การสนับสนุนทุนวิจัยตามสัญญาเลขที่ A86/2557

ฤทธิพล จันทราษฎร์
มีนาคม พ.ศ. 2557

บทคัดย่อ

รหัสโครงการ : A86/2557

ชื่อโครงการ : การจำลองการสั่นสะเทือนที่เกิดจากแรงเสียดทานโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ชื่อนักวิจัย : ดร.ฤทธิพล จันทราษฎร์

เมื่ออุปกรณ์สองสิ่งมาสัมผัสกันและเคลื่อนที่โดยมีความเร็วสัมพัทธ์กันจะทำให้เกิดการสั่นเกิดขึ้น เนื่องจากอุปกรณ์มีการขัดสีกันเกิดขึ้นโดยมีค่าแรงเสียดทานขึ้นอยู่กับความเร็วสัมพัทธ์ของอุปกรณ์ทั้งสอง ปัญหาที่เกิดขึ้นในสมการอนุพันธ์การเคลื่อนที่เป็นปัญหาไม่เชิงเส้นที่มีความยากลำบากในการ หาผลเฉลยแม่นตรง ดังนั้นในงานวิจัยนี้ได้สาธิตวิธีการหาผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีเชิงตัวเลขและวิธีไฟไนต์เอลิ-เมนต์

คำสำคัญ : "แรงเสียดทาน" "การสั่นสะเทือน" "ไฟไนต์เอลิเมนต์"

E-mail Address : Rittipol.Cha@rmutr.ac.th
ระยะเวลาโครงการ : ตุลาคม พ.ศ. 2556 – กันยายน พ.ศ. 2557

Abstract

Code of project : A86/2557

Project name : The Simulation of Friction-Induced Vibration Using Finite Element Method

Researcher name : D.Eng. Rittipol Chantarat

When two mechanical parts are in sliding contacts, relative velocity of two parts can induce vibration. In rubbing surface, frictional force depend on relative velocity of two parts. The equation of motion in differential forms is nonlinear and it is difficult to find exact solution. Therefore, this research demonstrate procedures of numerical methods and finite element method to find approximate solution.

Keywords: "Friction Force" "Vibration" "Finite Element Method"

E-mail Address : **"rittipol@yahoo.com"**

Period of project : OCTOBER, 2013 – SEPTEMBER, 2014

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลรัตนโกสินทร์

สารบัญ

	หน้า
กิตติกรรมประกาศ	ก
บทคัดย่อภาษาไทย	ข
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	ค
สารบัญ	ง
สารบัญตาราง	จ
สารบัญภาพ	ฉ
บทที่ 1 บทนำ	1
1. ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา	1
2. วัตถุประสงค์การวิจัย	2
3. กรอบแนวคิดการวิจัย	2
4. นิยามศัพท์	2
บทที่ 2 ทบทวนวรรณกรรมที่เกี่ยวข้อง / ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง	3
บทที่ 3 ระเบียบวิธีการวิจัย	5
1. การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์	5
2. วิธีเซนทรัลดิฟเฟอร์เรน 1-DOF	9
3. วิธีการออยเลอร์ 1-DOF	13
4. วิธีเซนทรัลดิฟเฟอร์เรน 2-DOF	14
บทที่ 4 ผลการวิจัย	16
1. ระบบมวลสปริงบนสายพาน 1 DOF	16
2. ระบบมวลสปริงบนสายพาน 2 DOF	19
3. การจำลองโดยใช้แท่งวัสดุแทนสปริง	22
บทที่ 5 สรุปผล อภิปรายผลและข้อเสนอแนะ	25
บรรณานุกรม	26
ภาคผนวก	27
ประวัติผู้วิจัย	31

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลรัตนโกสินทร์

สารบัญตาราง

หน้า

ตารางที่

1. วิธีการคำนวณแต่ละขั้นตอนโดยใช้วิธีเซนทรัลดิฟเฟอร์เรน 12
2. วิธีการคำนวณแต่ละขั้นตอนโดยใช้วิธีการออยเลอร์ 14

สารบัญภาพ

หน้า

ภาพที่

1. วัตถุถูกแรงกระทำตามแนวแกน และความยาว dx กับแรงตามแนวแกน 6
2. แท่งเอลิเมนต์ความยาว L มีพื้นที่หน้าตัดคงที่มีแรงภายใน f1 และ f2 กระทำอยู่ 9
3. ระบบมวลสปริงบนสายพานและแรงเสียดทาน dry friction 9
4. เฟสเพรนของมวล m โดยวิธีเซนทรัลดิฟเฟอร์เรนและวิธีการออยเลอร์ 16
5. การขจัดของมวล m โดยใช้วิธีวิธีเซนทรัลดิฟเฟอร์เรนและวิธีการออยเลอร์ 17
6. ความเร็วของมวล m โดยใช้วิธีวิธีเซนทรัลดิฟเฟอร์เรนและวิธีการออยเลอร์ 17
7. ความไม่เสถียรของวิธีการออยเลอร์เมื่อ Δt มีค่าเท่ากับ 0.8 s 18
8. ค่าประมาณความผิดพลาด (Estimated relative error, err) 19
9. การจำลองระบบมวล สปริง ลำดับขั้นความอิสระเท่ากับ 2 20
10. เปรียบเทียบวิธีวิธีออยเลอร์ และ เซนทรัลดิฟเฟอร์เรน 2 DOF 21
11. การแบ่งจำนวนเอลิเมนต์และโหนดของเอลิเมนต์แบบแท่ง 22
12. ความไม่เสถียรของการคำนวณและเฟสเพรนของโหนดที่ 3 โดยวิธีการออยเลอร์ 24

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลรัตนโกสินทร์

บทที่ 1
บทนำ

1. ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

การสั่นสะเทือนที่เกิดขึ้นกับชิ้นส่วนเครื่องจักรกล อาจเป็นสาเหตุทำให้เกิดความเสียหายกับชิ้นส่วนนั้น ดังนั้นในการออกแบบจะต้องคำนึงถึงความเป็นไปได้ที่จะเกิดการสั่นของชิ้นส่วนต่างๆ ในเครื่องจักร แหล่งกำเนิดการสั่นอาจมาจากการไม่สมดุลในการหมุน การสั่นเนื่องมาจากการขัดสีของการเคลื่อนที่สัมผัสกันของอุปกรณ์สองชิ้น การสั่นเนื่องมาจากแรงภายนอกกระทำเช่นแรงลม และ การสั่นเนื่องจากแผ่นดินไหว เป็นต้น การเสียหายของโครงสร้างที่พบเห็นกันเรื่อยมา ไม่ว่าจะเป็นการเสียหายที่โครงสร้างของรถยนต์ การเสียหายของโครงสร้างของอากาศยานต่าง ดังนั้นในขั้นตอนการออกแบบและทดสอบจำเป็นจะต้องเข้าใจถึงการป้องกันในการสั่นที่จะเกิดขึ้น

แรงกระทำที่กระทำบนระบบที่เกิดการสั่นมักจะเป็นแรงจากภายนอกระบบและไม่ขึ้นกับการเคลื่อนที่ของระบบ อย่างไรก็ตาม จะมีระบบบางประเภทที่แรงกระทำนี้ขึ้นอยู่กับตัวแปรการเคลื่อนที่ของระบบ เช่น การขจัด ความเร็ว และความเร่ง ระบบดังกล่าวจะเรียก ระบบกระตุ้นตัวเอง (Self-Excited System) เพราะตัวระบบเองเป็นแหล่งกำเนิดกระตุ้นของระบบ ตัวอย่างของระบบเหล่านี้ เช่น การหมุนของเพลาที่ไม่สมดุล ทรงกระบอกที่มีลมไหลผ่าน การเคลื่อนที่ของวัตถุบนสายพาน และ การเกิดเสียงที่จานเบรกเมื่อเบรกรถ

ปัญหาที่เกิดจากตัวหน่วงที่เกิดจากแรงเสียดทานเป็นอีกสาเหตุหนึ่งซึ่งทำให้เกิดการสั่นขึ้น (Friction-Induced Vibration) เช่น การสั่นของวัตถุที่เกิดจากแรงเสียดทานที่สัมผัสกับสายพาน การสั่นของล้อรถไฟขณะเบียดกับราง การสั่นขณะผ้าเบรคสัมผัสกับจานเบรค การสั่นของที่ปัดน้ำฝนสัมผัสกับกระจก และ การสั่นของขณะฟันของหลีดสกรูสัมผัสกัน เป็นต้น ปัญหาที่เกิดการสั่นเนื่องจากแรงเสียดทานสามารถแบ่งออกได้สองแบบคือ สติคสลิป (Stick-slip) และ ควอไซต์ฮาโมนิค (Quasi-harmonic) เมื่อวัตถุเคลื่อนที่สัมผัสกันแล้วเกิดการขจัดแบบฟันปลาเมื่อเทียบกับเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่รูปแบบการเคลื่อนที่แบบนี้เรียกว่า การสั่นแบบสติคสลิป ในทางกลับกันการสั่นแบบควอไซต์ฮาโมนิคการขจัดมีรูปแบบคลื่นไซน์เมื่อเทียบกับเวลา การเคลื่อนที่จะอยู่ในช่วงสลิปซึ่งการสั่นจะขึ้นอยู่กับความสัมพันธ์ของความเร็วและแรงเสียดทาน

เนื่องจากปัญหาการสั่นเนื่องจากแรงเสียดทานทำให้สมการเชิงอนุพันธ์ที่อธิบายการเคลื่อนที่ของระบบมีลักษณะแบบไม่เชิงเส้นดังนั้นการใช้วิธีทางการประมาณด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์หน้าจะเหมาะสมในการวิเคราะห์ปัญหามากกว่าการมุ่งหาผลเฉลยแม่นตรง ดังนั้นโครงงานวิจัยนี้ได้นำเสนอวิธีการแก้ปัญหาการสั่นเนื่องจากแรงเสียดทานโดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

2. วัตถุประสงค์การวิจัย

1. เพื่อจำลองการเกิดการสั่นสะเทือนที่เกิดจากแรงเสียดทานโดยใช้วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์
2. เพื่อนำผลการศึกษาที่ได้ไปทำนายและลดความเสียหาจากอุปกรณ์ทางกลต่างๆ

3. กรอบแนวคิดการวิจัย

สร้างโมเดลทางคณิตศาสตร์ของการสั่นสะเทือนที่เกิดจากแรงเสียดทาน จากนั้นใช้วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ ทำการจำลองการสั่นสะเทือนของอุปกรณ์ต่างๆ

4. นิยามศัพท์

การสั่น “การเคลื่อนที่ของวัตถุรอบๆ จุดสมดุลในห้วงเวลาหนึ่งของการเคลื่อนที่ ไม่ว่าการเคลื่อนที่รอบจุดสมดุลนั้นจะเกิดขึ้นแบบซ้ำตัวเองหรือไม่ก็ตามเราจะเรียกการเคลื่อนที่นั้นว่า การสั่น (vibration)”

วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ “ในการแก้ปัญหาใดๆ ปัญหานั้นมักจะประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์และเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนด ความยากลำบากที่จะหาค่าของผลเฉลยแม่นตรง (exact solution) อาจเป็นเพราะความซับซ้อนของสมการเชิงอนุพันธ์ หรือ จากการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตให้เข้ากับปัญหานั้น แทนที่จะทำการหาค่าแม่นตรงซึ่งในทางปฏิบัติทำได้ยากหรือไม่ได้เลย เปลี่ยนมาเป็นการประมาณค่าโดยจำนวนที่นับได้ (finite) ด้วยการแทนรูปร่างลักษณะของปัญหาด้วยเอลิเมนต์ (elements) ซึ่งมีขนาดต่างๆกัน”

บทที่ 2
ทบทวนวรรณกรรมที่เกี่ยวข้อง / ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

เนื่องจากความมหัศจรรย์ของแรงเสียดทานนักวิทยาศาสตร์หลายท่านในอดีตได้ทำการค้นคว้าและพยายามอธิบายแรงเสียดทานที่เกิดขึ้นบนผิววัสดุที่เคลื่อนที่เสียดสีกัน ในสมัยอียิปต์โบราณ Davision ได้ทำการคำนวณจำนวนทาสที่ต้องใช้ในการออกแรงดึงวัตถุ 60 ตันโดยใช้เลื่อน ทาสแต่ละคนออกแรงดึง 120 ปอนด์และให้ค่าสัมประสิทธิ์แรงเสียดทานของไม้ที่ใช้ทำเลื่อนเท่ากับ 0.16 เขาสามารถคำนวณจำนวนทาสที่ต้องใช้คือ 179 คน Leonardo da Vinci ได้ทำการสร้างเครื่องมือหลายรูปแบบเพื่อศึกษาความเสียดทานแต่เขาไม่เคยพูดถึงแรงเสียดทาน Leonhard Euler เป็นบุคคลแรกที่ได้ทำความเข้าใจและสามารถแยกแรงเสียดทานสถิตออกจากแรงเสียดทานจลน์ ซึ่งเขาสรุปว่าแรงเสียดทานจลน์ต้องน้อยกว่าแรงเสียดทานสถิตย์และเป็นบุคคลแรงที่ได้ใช้อักษรกรีก μ ในการแทนค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทาน

สมการอนุพันธ์ที่เป็นสมการการเคลื่อนที่ของปัญหาการสั่นเนื่องจากแรงเสียดทานสามารถอธิบายการสั่นที่เกิดขึ้นจากการสัมผัสกันของวัสดุได้ เนื่องจากสมการอนุพันธ์เป็นสมการไม่เป็นเชิงเส้นจึงมีความยากในการหาคำตอบโดยวิธีการวิเคราะห์ ดังนั้นจึงมีนักวิทยาศาสตร์และนักคณิตศาสตร์หลายท่านทำการศึกษาวิธีการประมาณหาคำตอบจากสมาการอนุพันธ์เช่น วิธีเชิงตัวเลข(Numerical methods) และ วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite element method) เป็นต้น

Leine และ คณะ (1998) ได้นำเสนอวิธีการจำลองการสั่นแบบสติคสลิป วิธีการสมูติ้ง (Smoothing method) ถูกนำมาใช้แทนฟังก์ชันแรงเสียดทานแบบเดิมๆ ที่มีความไม่ต่อเนื่อง แต่วิธีใหม่มีความต่อเนื่องและเหมาะนำไปใช้กับวิธีชูทติ้ง (Shoothing method) เพื่อหาผลเฉลยโดยประมาณ ผลที่ได้จากวิธีนี้ถูกนำไปเปรียบเทียบกับวิธีแบบจำลองสวิท (The switch model) และหาผลเฉลยโดยวิธีรุงกุตะ (Runge-Kutta integration method) จากอัลกรอลิทรึมที่ได้ศึกษาถูกนำไปประยุกต์ใช้กับการเกิดสติคสลิปในสายไวโอลิน สุดท้ายสรุปได้ว่าวิธีแบบจำลองสวิทให้ผลที่ดีที่สุด

Vrande และ คณะ (1999) ได้นำเสนอวิธีการสมูติ้งใช้ร่วมกับวิธีชูทติ้งเพื่ออธิบายการเกิดการสั่นในการจำลองหัวเจาะ (Drill string model) และการสั่นของกล่องบนสายพาน 1-DOF และ 2-DOF ถูกสังเกตุในการจำลองนี้ผลการจำลองถูกนำไปเปรียบเทียบกับวิธีฮีนอน (Hénon' method) ซึ่งเป็นวิธีเชิงตัวเลขที่มีความแม่นยำมากที่สุด

Awrejcewicz และคณะ (2002) ได้ใช้วิธีฮีนอนในการจำองการสั่นแบบสติคสลิป ค่าพารามิเตอร์ควบคุม ε ถูกประเมินในความถูกต้องของการประมาณค่ากราฟสตีเบค (Stribeck curve) Pawel และคณะ (2013) ได้ทำการใช้วิธีฮีนอนเขียนโค้ดในไพทอน (Python) ในการศึกษาสติคสลิป Poincare' maps, phase trajectories และ bifurcation diagram ได้ถูกหาจากระบบสองมิติ

Lou และ คณะ (2003) ได้ใช้วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ในการหา eigenvalues ของดิสค์เบรคเมื่อเกิดเสียงดังในการเบรคเพราะเกิดจากปัญหาการสั่นเนื่องจากแรงเสียดทาน (Friction induced vibration) อัลกรอลิทรึม ABLE ได้ถูกพัฒนาขึ้นและศึกษา

Song และคณะ (2005) ได้ศึกษาคานยื่น (cantilever beam) สองอันประกบกันระหว่างการสั่นได้เกิดแรงเสียดทานระหว่างคานทั้งสองและเกิดการกระทบกันขึ้น การสัมผัสได้ถูกนำมาคิดระหว่างคานที่ประกบกัน การใช้กฎของคูลอมไม่ได้รวมถึงการเสียรูปของ asperity ในการศึกษานี้ การคำนวณเชิงตัวเลขโดยใช้กฎความเสียดทานที่ไม่เป็นเชิงเส้นของ Oden และ Pires ได้ถูกนำมาใช้คำนวณ ผลจากการการ

คำนวณถูกนำมาเปรียบเทียบกับการทดลองพบว่าควาเร่งของคานในการทดลองได้น้อยกว่าจากการคำนวณแต่รูปแบการสั่นใกล้เคียงกัน สัญญาณได้ถูกนำมาวิเคราะห์ความถี่พบว่าพลังงานเนื่องจากการสั่นได้ถูกทำให้เพิ่มขึ้นจากการเปลี่ยนความถี่ต่ำเป็นความถี่สูงเนื่องจากการกระทบกันของคาน

Ozaki และคณะ (2014) ได้ใช้วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ในการศึกษาการเกิดสติสลิป (macroscopic stick-slip transition) ในวัตถุยืดหยุ่นเขาสรุปว่าปัญหาขอบเขต (boundary value problem) ความสำคัญมากกับการอธิบายความสัมพันธ์โมเดลแรงเสียดทาน และจากการทดสอบ

Massi และคณะ (2013) ได้ใช้วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้โค้ดของ PLASTD ในการศึกษาปัญหาการสัมผัสกันของแผ่นจานกลมโพลีคาร์บอนเนต์ กฎความเสียดทานคูลอมได้ถูกนำมาใช้ ความถี่และโหมดของความไม่เสถียรของแผ่นได้ถูกวิเคราะห์ ความเสียดทานที่ก่อให้เกิดความไม่เสถียรของระบบได้ถูกตรวจสอบโดยการทดสอบจากอุปกรณ์จริง

Sinou และคณะ (2013) ได้ทำการศึกษาการเกิดการสั่นเนื่องจากความเสียดทานของระบบเชิงกลที่มีการหลอลื่น แบบจำลองมวลบนสายพานและมีการหล่อลื่นระหว่างมวลกับสายพานได้ถูกนำมาใช้ในการจำลองเชิงตัวเลข สารหล่อลื่นถูกคิดเป็นวัตถุจำพวก viscoelastic ที่มีโมดูลัสเฉือนและมีความหนืด สัมประสิทธิ์แรงเสียดทานเป็นฟังก์ชันของความเร็วสัมพัทธ์ระหว่างมวลกับสายพาน ความหนืด โมดูลัสเฉือน และ ความหนาของแผ่นฟิล์มของสารหล่อลื่น

Ignatov และคณะ (2013) ได้ทำการศึกษาการเกิดการสั่นของรางรถไฟเนื่องจากแรงเสียดทาน ขณะที่ล้อรถไฟเกิดการลื่นไถลไปด้านข้าง แรงเสียดทานถูกกำหนดให้เป็นฟังชันก์กับความเร็ว โปรแกรมไฟไนต์เอเลเมนต์ (Ansys) ถูกนำมาจำลองการเกิดการสั่นสะเทือนนี้ พบว่าการสั่นเนื่องจากแรงเสียดทานเกิดขึ้นที่โหมดที่หนึ่งของความถี่ธรรมชาติของระบบ

Baillet และคณะ (2006) ได้ใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (explicit dynamic FEM) PLAST3 เพื่อทำการจำลองการสัมผัสกันระหว่างแท่ง (pin) และ จานกลม (disk) ใช้ลากราง (Lagrange multiplier method) สำหรับการสัมผัสและการเสียรูปของอุปกรณ์ทั้งสอง การแบ่งตำแหน่ง (spatial discretization) ใช้วิธี $\beta 2$ เอลิเมนต์แบบกล่องสี่เหลี่ยมด้านเท่าถูกใช้สำหรับเอลิเมนต์สามมิติ จากการจำลองพบว่าความเค้นที่เกิดขึ้นมีค่ามากกว่าที่คำนวณได้จากสูตรโดยทั่วไป

Meziane และ คณะ (2010) ศึกษาถึงการสัมผัสกันของคานอยู่บนคาน การทดลองและการคำนวณเชิงตัวเลขได้ถูกทดสอบและสังเกต เมื่อคานลื่นไถลอยู่บนคานได้เกิดการสั่นขึ้นเนื่องจากแรงเสียดทานขึ้น ค่าไอเกรน (eigenvalue) ได้ถูกวิเคราะห์ถึงการเกิดการติด ลื่นไถล และ การแยกจากกัน

Schutte และ คณะ (2010) ศึกษาถึงความสัมพันธ์การกลิ้งของยางกับพื้นถนน วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ implicit และ explicit ได้ถูกสร้างขึ้นเพื่อทำการจำลองในสามมิติ วัสดุที่ใช้ทำยางเป็นแบบ Hyperelastic ความเสียดทานได้ถูกเพิ่มเข้ามาในแบบจำลอง อัลกรอริทึมได้ถูกเปรียบกับโปรแกรม Abaqus พบว่าให้ผลที่คงที่ในการจำลอง

Pilipchuk และ คณะ (2015) การเกิดการสั่นเนื่องจากแรงเสียดทานของสองลำดับขั้นความอิสระของโมเดลเบรคได้ถูกจำลองในงานวิจัย สายพาน สปริง และ มวลได้ถูกออกแบบให้สามารถเปลี่ยนแปลงโหลดตั้งฉากได้ระหว่างการเบรก งานวิจัยพบการลดลงของความเร็วสายพานและได้เกิดปรากฏการณ์เสียงแหลม (squeal phenomenon) สเปรคตัมความถี่ของการสั่นได้ถูกวิเคราะห์ในการทดลองนี้

บทที่ 3
ระเบียบวิธีการวิจัย

งานวิจัยนี้มุ่งเน้นการสร้างโมเดลทางคณิตศาสตร์ของการเกิดการสั่นที่เกิดจากแรงเสียดทาน จากนั้นใช้วิธีการเชิงตัวเลข (Numerical methods) และไฟไนต์เอลิเมนต์ในการแก้สมการทางคณิตศาสตร์ และเปรียบเทียบผลที่ได้ของทั้งสองวิธี วิธีการวิจัยถูกแบ่งออกเป็นสี่ส่วน ในส่วนที่หนึ่งการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์จะมุ้งเน้นในการสร้างสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุในงานวิจัยนี้จะใช้ตัวอย่างของแท่งวัตถุที่ถูกแรงกระทำและมีการเคลื่อนที่ ในส่วนที่สองวิธีการเซนทรัลดิฟเฟอร์เรน

1. การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์

วิชากลศาสตร์วัสดุเป็นวิชาที่เกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของวัตถุ (motion) และการเปลี่ยนรูปของวัตถุ (deformation) ของแข็ง การเคลื่อนที่แบบลากรานเกียน (Lagrangian motion) ถูกใช้สำหรับกฎการอนุรักษ์โดยทั่วไปสำหรับการเคลื่อนที่ ภายใต้เงื่อนไขที่ความร้อนเท่ากัน (isothermal condition) สมการทางความร้อนจะแยกออกจากสมการอนุรักษ์โมเมนตัม ดังนั้นสามารถที่จะพิจารณาการเคลื่อนที่โดยใช้สมการการเคลื่อนที่อย่างเดียว

การสร้างสมการการเคลื่อนที่ของเอลิเมนต์แบบแท่ง (bar element) พิจารณาภาพที่ 1 วัตถุมีความยาว L มีพื้นที่หน้าตัด A วัสดุที่ใช้ทำแท่งมีเนื้อเดียวกัน (Homogeneous materials) คือคุณสมบัติไม่ขึ้นอยู่กับตำแหน่ง พื้นที่หน้าตัดอาจจะคงที่หรือเปลี่ยนแปลงตามแนวแกน แรงตามแนวแกนสมมาตรที่เซนทรอยด์ของหน้าตัด จากกฎข้อที่สองของนิวตันจะได้

$$\sum F_x = ma \tag{1}$$

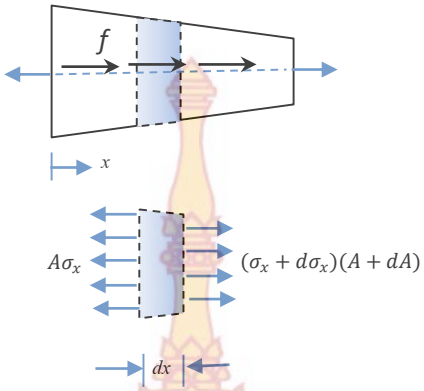
$$-\sigma_x A + (\sigma_x + d\sigma_x)(A + dA) + fdx = \rho[A + (A + dA)]\frac{dx}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \tag{2}$$

$$Ad\sigma_x + \sigma_x dA + d\sigma_x dA + fdx = \rho[A + \frac{1}{2}dA]dx\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \tag{3}$$

หาร (3) ด้วย dx และให้ลิมิต (limit) $dx \longrightarrow 0$ จะได้

$$\frac{\partial(\sigma_x A)}{\partial x} + f = \rho A\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \tag{4}$$

เมื่อ f คือ body force ต่อ unit length



ภาพที่1 วัตถุถูกแรงกระทำตามแนวแกน และความยาว dx กับแรงตามแนวแกน

ใช้ความสัมพันธ์ของความเค้นและความเครียดจะได้

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E\frac{\partial U}{\partial x} \tag{5}$$

แทน (5) ใน (4) จะได้

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(EA\frac{\partial U}{\partial x}\right) + f = \rho A\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \tag{6}$$

ถ้าพื้นที่หน้าตัดของแท่งมีค่าคงที่สมการที่ (6) เขียนใหม่ได้ดังนี้

$$E\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{f}{A} = \rho\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \tag{7}$$

เมื่อ E คือค่ายังมอดูลัส ρ คือความหนาแน่น U คือการขจัด และ t คือเวลา

แทนความหนาแน่นในสมการที่ (7) เป็น $\rho = \frac{m}{AL}$ เมื่อ m คือมวล A คือพื้นที่หน้าตัด และ L คือความยาวของเอลิเมนต์แสดงในภาพที่ 2 จะได้

$$E\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{f}{A} = \frac{m}{AL}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \tag{8}$$

$$0 = m\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - EAL\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - Lf \tag{9}$$

ให้ shape function ขึ้นอยู่กับเวลาและการขจัด

$$U = u_1\phi_1(x,t) + u_2\phi_2(x,t) \tag{10}$$

ใช้วิธี separation of variable จะได้

$$U = u_1(t)\phi_1(x) + u_2(t)\phi_2(x) \tag{11}$$

ใช้ Local coordinate โดย $0 \le x \le L$ จะได้ $\phi_1(x) = 1 - \frac{x}{L}$ และ $\phi_2(x) = \frac{x}{L}$ ให้ weight function $\mathbf{w} = [\phi_1(x) \quad \phi_2(x)]^T$ สมการที่ (3) เขียนในรูป Residuals (R) จะได้

$$R = m\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - EAL\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - Lf \tag{12}$$

วิธีการ์เลอคิน (Galerkin method) สามารถทำได้โดยคูณ weight function ($\mathbf{w}$) กับเศษตกค้าง (Residuals) แล้วอินทิเกรตให้เท่ากับศูนย์

$$\int_{x=0}^{x=L} \mathbf{w}R\,dx = 0 \tag{13}$$

$$\int_{x=0}^{x=L} \mathbf{w}\left(m\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - EAL\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - Lf \right) dx = 0 \tag{14}$$

ใช้วิธี integrate by parts พจน์ที่ 2 สมการที่ (14)

$$\int_0^L \mathbf{w}m\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\,dx - EAL\int_0^L \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathbf{w}\frac{\partial U}{\partial x} \right) dx + EAL\int_0^L \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x}\,dx - \int_0^L Lf\,dx = 0 \tag{15}$$

$$\int_0^L \mathbf{w}m\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\,dx + EAL\int_0^L \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x}\,dx = \int_0^L \mathbf{w}Lf\,dx - \left[\left(-EAL\mathbf{w}\frac{\partial U}{\partial x} \right) \right]_0^L \tag{16}$$

พจน์สุดท้ายประกอบด้วยพจน์ของขอบเขต หรือเรียกว่า Flux

$$\left[\left(-EAL\mathbf{w}\frac{\partial U}{\partial x} \right) \right]_0^L = [\tilde{\tau}\mathbf{w}]_0^L \tag{17}$$

จากนั้นหาค่าแต่ละพจน์ในสมการที่ (16) จากสมการที่ (11) จะได้ความเร่ง $\ddot{U} = \ddot{u}_1\phi_1 + \ddot{u}_2\phi_2$ แทนลงใน พจน์แรกของสมการที่ (16)

$$\int_0^L \mathbf{w} m \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} dx = \int_0^L \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} m \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} dx \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} = m \int_0^L \begin{bmatrix} \phi_1^2 & \phi_1\phi_2 \\ \phi_1\phi_2 & \phi_2^2 \end{bmatrix} dx \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} = mL \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} \tag{18}$$

จากนั้นหาพจน์ที่ 2 ของสมการที่ (16)

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} dx &= \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \end{bmatrix} dx \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \\ &= \int_0^L \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x}\right)^2 & \frac{\partial \phi_1}{\partial x}\frac{\partial \phi_2}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x}\frac{\partial \phi_2}{\partial x} & \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x}\right)^2 \end{bmatrix} dx \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{19}$$

แทน (18) และ (19) ลงใน (16) จะได้

$$mL \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \end{Bmatrix} + \frac{EAL}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \int_0^L \mathbf{w} L f dx - \left[\left(-EAL\mathbf{w} \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right]_0^L$$

$$m \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \end{Bmatrix} + \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \int_0^L \mathbf{w} f dx - \left[\left(-EA\mathbf{w} \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right]_0^L$$

$$m \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \end{Bmatrix} + \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{ext}(t) \\ f_2^{ext}(t) \end{Bmatrix} \tag{20}$$

ค่า $\ddot{u}_1$ และ $\ddot{u}_2$ คือ อัตราเร่งที่โหนดที่ 1 และโหนดที่ 2 ค่า u_1 และ u_2 คือ การขจัดโหนดที่ 1 และโหนดที่ 2 ค่า f_1^{ext} และ f_2^{ext} คือ แรงภายนอกโหนดที่ 1 และโหนดที่ 2 ให้ body force เท่ากับศูนย์และบังคับให้ flux มีความต่อเนื่องระหว่างเอลิเมนต์ ภาพที่ 2 อธิบายสมการที่ (20) และเขียนใหม่ในรูปเมตริกซ์ได้

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}^{ext} \tag{21}$$

โดย $\mathbf{M} = m \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{K} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ และ $\mathbf{f}^{ext} = \begin{Bmatrix} f_1^{ext} \\ f_2^{ext} \end{Bmatrix}$

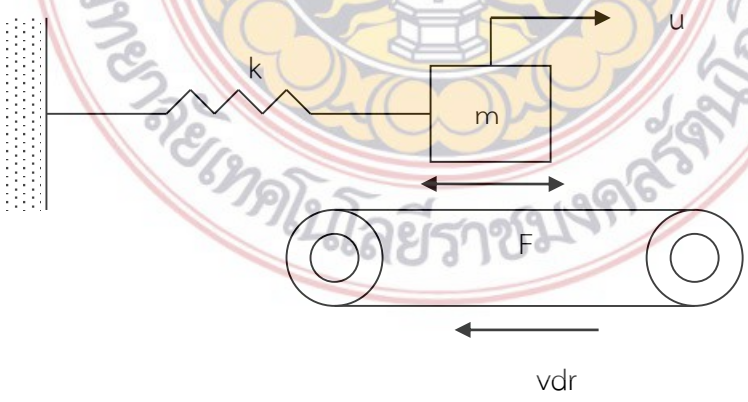
เมื่อ $\mathbf{M}$ คือ เมตริกซ์มวล $\mathbf{K}$ คือ เมตริกซ์ความแข็งเกร็ง $\ddot{\mathbf{u}}$ คือความเร่ง $\mathbf{u}$ คือการขจัด และ $\mathbf{f}^{ext}$ คือแรงภายนอก

ในสมการที่ (21) ถ้า $\mathbf{M} = m\begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}$ เรียกว่ามวลแบบนัย (consistent mass matrix) เมตริกซ์มวลแบบนัยนี้สัมประสิทธิ์ทุกๆ ตัวในเมตริกซ์จะไม่เท่ากับศูนย์ซึ่งหมายความว่าสมการย่อยในสมการที่ (21) นั้นจะเกี่ยวข้องและสัมพันธ์กันหมด (coupled equations) ซึ่งจะทำให้การแก้สมการเพื่อหาผลลัพธ์ของสมการระบบรวมต้องใช้เวลาคำนวณมาก ดังนั้นในการคำนวณโดยเฉพาะปัญหาขนาดใหญ่จะใช้เมตริกซ์มวลรวมแบบจุดต่อ (lumped mass matrix) $\mathbf{M} = m\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ ซึ่งสมการระบบรวมนั้นไม่เกี่ยวข้องสัมพันธ์กัน (uncouple equations) ช่วยลดเวลาในการคำนวณลงได้

ภาพที่ 2 แท่งเอลิเมนต์ความยาว L มีพื้นที่หน้าตัดคงที่มีแรงภายนอกกระทำอยู่

2. วิธีเซนทรัลดิฟเฟอร์เรน 1 DOF

ถ้ามีระบบมวลสปริงวิ่งบนสายพานดังภาพที่ 3 สามารถเขียนสมการการเคลื่อนที่ได้เช่น



ภาพที่ 3 ระบบมวลสปริงบนสายพานและแรงเสียดทาน dry friction

$$m\frac{d^2u}{dt^2}+ku=F$$
$$u(t=0)=u_0,\dot{u}(t=0)=\dot{u}_0 \quad (22)$$

เมื่อ ตัวแปร *m* คือ มวล ตัวแปร *u* คือการขจัด ตัวแปร *k* คือค่าคงที่ของสปริง ตัวแปร *t* คือเวลา และมีค่าเริ่มต้น (initial condition) ที่เวลา *t* = 0 คือ การขจัด u_0 ความเร็ว $\dot{u}_0$ และ *F* คือแรงเสียดทานระหว่างมวล m กับสายพานโดยแรงเสียดทานสามารถแสดงได้ดังสมการข้างล่าง

$$F=-\frac{F_s\frac{2}{\pi}\arctan[\varepsilon(\dot{u}-vdr)]}{1+\delta|\dot{u}-vdr|} \quad (23)$$

โดย ค่า $\dot{u}$ คือความเร็วของมวล ค่า vdr คือความเร็วของสายพาน ค่า ε คือค่าความชันของกราฟ (steepness parameter) ค่า F_s คือ แรงฝืดสถิตสูงสุด (maximum static friction force) และ ค่า δ คือค่าคงที่

ในวิธีเซนทรัลดิฟเฟอร์เรน (Central difference method) สมมุติให้ความเร่งที่เวลา t คือ

$${}^t\ddot{u}=\frac{1}{\Delta t^2}({}^{t-\Delta t}u-2{}^tu+{}^{t+\Delta t}u) \quad (24)$$

ความเร็วที่เวลา t คือ

$${}^t\dot{u}=\frac{1}{2\Delta t}(-{}^{t-\Delta t}u+{}^{t+\Delta t}u) \quad (25)$$

สมการ (22) ที่เวลา t คือ

$$m{}^t\ddot{u}+k{}^tu=-\frac{F_s\frac{2}{\pi}\arctan[\varepsilon({}^t\dot{u}-vdr)]}{1+\delta|{}^t\dot{u}-vdr|} \quad (26)$$

แทนสมการ (24) และ (25) ลงใน (26) จะได้

$$\frac{m}{\Delta t^2}({}^{t-\Delta t}u-2{}^tu+{}^{t+\Delta t}u)+k{}^tu+\frac{F_s\frac{2}{\pi}\arctan\{\varepsilon[\frac{1}{2\Delta t}(-{}^{t-\Delta t}u+{}^{t+\Delta t}u)-vdr]\}}{1+\delta\left|\frac{1}{2\Delta t}(-{}^{t-\Delta t}u+{}^{t+\Delta t}u)-vdr\right|}=0 \quad (27)$$

จะเห็นว่าสมการที่ (27) เป็นสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้นสามารถที่จะใช้วิธีนิวตันราฟสัน (Newton-Raphson method) หาคำตอบที่ของ u ที่เวลา t+Δt ได้ดังนี้โดยเขียน (27) ในรูปฟังก์ชัน R จะได้

$$\frac{m}{\Delta t^2}({}^{t-\Delta t}u - 2{}^{t}u + {}^{t+\Delta t}u) + k{}^{t}u + \frac{F_s \frac{2}{\pi}\arctan\{\varepsilon[\frac{1}{2\Delta t}(-{}^{t-\Delta t}u + {}^{t+\Delta t}u) - vdr]\}}{1+\delta\left|\frac{1}{2\Delta t}(-{}^{t-\Delta t}u + {}^{t+\Delta t}u) - vdr\right|} = R \tag{28}$$

นำสมการ (28) มาคำนวณวนซ้ำจะได้ค่าประมาณใหม่ดังเช่น

$${}^{t+\Delta t}u_{i+1} = {}^{t+\Delta t}u_i - \frac{R({}^{t+\Delta t}u_i)}{\left(\frac{dR({}^{t+\Delta t}u_i)}{d^{t+\Delta t}u}\right)} \tag{29}$$

ทำการคำนวณวนซ้ำไปเรื่อยๆ จนค่าการขจัดที่ครั้ง i มีความแตกต่างน้อยมากเมื่อเทียบกับครั้ง i+1 โดยใช้ค่าประมาณความผิดพลาด (Estimated relative error, err) การวนซ้ำจะหยุดโดยค่าสัมบูรณ์ประมาณความผิดพลาดน้อยกว่า err จะได้

$$\left|{}^{t+\Delta t}u_{i+1} - {}^{t+\Delta t}u_i\right| \le err \tag{30}$$

โดยที่ i คือครั้งในการวนซ้ำ ตารางที่1 สรุปวิธีการคำนวณที่สร้างในโปรแกรมคอมพิวเตอร์

ในการหาค่าพจน์ $dR/d^{t+\Delta t}u$ ในสมการ (29) สามารถทำได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
&\frac{dR}{d^{t+\Delta t}u} \\
&= \frac{m}{\Delta t^2} + \left(\frac{1}{1+\delta\left|\frac{1}{2\Delta t}(-{}^{t-\Delta t}u + {}^{t+\Delta t}u) - v_{dr}\right|}\right) \times \frac{d}{d^{t+\Delta t}u}\left\{F_s \frac{2}{\pi}\arctan[\varepsilon(\frac{1}{2\Delta t}(-{}^{t-\Delta t}u + {}^{t+\Delta t}u) - vdr)]\right\} \\
&+ \left(F_s \frac{2}{\pi}\arctan[\varepsilon(\frac{1}{2\Delta t}(-{}^{t-\Delta t}u + {}^{t+\Delta t}u) - vdr)]\right) \times \frac{d}{d^{t+\Delta t}u}\left\{\frac{1}{1+\delta\left|\frac{1}{2\Delta t}(-{}^{t-\Delta t}u + {}^{t+\Delta t}u) - v_{dr}\right|}\right\}
\end{aligned} \tag{31}$$

โดย

$$\frac{d}{d^{t+\Delta t}u}\left\{F_s\frac{2}{\pi}\arctan[\varepsilon(\frac{1}{2\Delta t}(-^{t-\Delta t}u+^{t+\Delta t}u)-vdr)]\right\}=\frac{F_s\varepsilon}{\pi\Delta t}\left(\frac{1}{\varepsilon^2\left[\frac{1}{2\Delta t}(-^{t-\Delta t}u+^{t+\Delta t}u)-v_{dr}\right]^2}\right) \quad (32)$$

และ

$$\frac{d}{d^{t+\Delta t}u}\left\{\frac{1}{1+\delta\left|\frac{1}{2\Delta t}(-^{t-\Delta t}u+^{t+\Delta t}u)-v_{dr}\right|}\right\}$$
$$=-\frac{\delta}{2\Delta t}\left[\frac{1}{\left(1+\delta\left|\frac{1}{2\Delta t}(-^{t-\Delta t}u+^{t+\Delta t}u)-v_{dr}\right|\right)^2}\right]\times\frac{\frac{1}{2\Delta t}(-^{t-\Delta t}u+^{t+\Delta t}u)-v_{dr}}{\left|\frac{1}{2\Delta t}(-^{t-\Delta t}u+^{t+\Delta t}u)-v_{dr}\right|} \quad (33)$$

ตารางที่ 1 วิธีการคำนวณแต่ละขั้นตอนโดยใช้วิธีเซนทรัลดิฟเฟอร์เรน

ก. เริ่มต้นการคำนวณ:

1. กำหนดค่าความแข็งเกร็ง k ค่ามวล m
2. กำหนดค่าเริ่มต้น initial condition ^0u $^0\dot{u}$ $^0\ddot{u}$
3. เลือกช่วงเวลา Δt
4. คำนวณ $^{-\Delta t}u={}^0u-\Delta t\,{}^0\dot{u}+\frac{\Delta t^2}{2}{}^0\ddot{u}$
5. กำหนดค่าประมาณความผิดพลาด err

ข. แต่ละช่วงเวลา:

1. สมมุติค่า $^{t+\Delta t}u_i$
2. หาค่า $R(^{t+\Delta t}u_i)$ และ $\frac{dR(^{t+\Delta t}u_i)}{d^{t+\Delta t}u}$ โดยใช้สมการที่ (28) และ (31)
3. ทำการหาค่าการขจัด $^{t+\Delta t}u_{i+1}$ สมการที่ (29)
4. ทำการตรวจสอบค่าสัมบูรณ์ประมาณความผิดพลาดใช้สมการที่ (30)
5. คำนวณความเร็ว และความเร่งต่างๆ

$$^t\dot{u}=\frac{1}{2\Delta t}(-^{t-\Delta t}u+^{t+\Delta t}u)$$

$$^t\ddot{u}=\frac{1}{\Delta t^2}(^{t-\Delta t}u-2^tu+^{t+\Delta t}u)$$

3. วิธีการออยเลอร์ 1 DOF

การใช้วิธีการออยเลอร์แก้สมการอนุพันธ์อันดับสองสามารถทำได้โดยจัดรูปแบบสมการที่ (22) ใหม่จะได้

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{F(\dot{u})}{m} - \frac{k}{m}u \tag{34}$$

ให้ $v = \frac{du}{dt}$ คือความเร็วแทนค่า v ในสมการที่ (34) จะได้

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F(v)}{m} - \frac{k}{m}u \tag{35}$$

จะเห็นได้ว่ามีสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งอยู่สองสมการคือ

$$\frac{du}{dt} = v \qquad \text{เมื่อ} \quad u(t=0) = 0 \tag{36}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F(v)}{m} - \frac{k}{m}u \quad \text{เมื่อ} \quad v(t=0) = 0 \tag{37}$$

วิธีออยเลอร์ตั้งสมมุติฐานที่ว่าสำหรับ เวลาสั้นๆ Δt สามารถที่จะเขียนได้ว่า

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t \tag{38}$$

$$u_{i+1} = u_i + v_i \cdot \Delta t \tag{39}$$

$$v_{i+1} = v_i + \left(\frac{F(v_i)}{m} - \frac{k}{m}u_i \right) \cdot \Delta t \tag{40}$$

โดย ค่า Δt คือช่วงเวลาที่ใช้คำนวณ ค่า t คือ เวลา ค่า i คือ ครั้งเวลาในการคำนวณ $i = 0,\ldots,n$ วิธีการคำนวณโดยวิธีออยเลอร์สามารถสรุปได้ดังตารางที่ 2

ตารางที่ 2 วิธีการคำนวณแต่ละขั้นตอนโดยใช้วิธีการออยเลอร์

ก. เริ่มต้นการคำนวณ:

1. กำหนดค่าความแข็งเกร็ง k ค่ามวล m
2. กำหนดค่าเริ่มต้น initial condition v_0 , u_0
3. เลือกช่วงเวลา Δt และคำนวณค่า n

ข. แต่ละช่วงเวลา:

1. คำนวณค่า $t_{i+1} = t_i + \Delta t$
2. คำนวณค่า $u_{i+1} = u_i + v_i \cdot \Delta t$
3. คำนวณค่า $v_{i+1} = v_i + \left(\frac{F(v_i)}{m} - \frac{k}{m} u_i \right) \cdot \Delta t$

4. วิธีเซนทรัลดิฟเฟอร์เรน 2 DOF

วิธีการหาการขจัดในแต่ละช่วงเวลาโดยวิธีเซนทรัลดิฟเฟอร์เรน สามารถเขียนเป็นระบบสมการ 2 DOF ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^t\ddot{u}_1 \\ {}^t\ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^t u_1 \\ {}^t u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^t f_1 \\ {}^t f_2 \end{Bmatrix} \tag{41}$$

ถ้า $\begin{Bmatrix} {}^t f_1 \\ {}^t f_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ F \end{Bmatrix}$ เมื่อ F คือ แรงเสียดทานในสมการที่ (23) จะเห็นว่าสมการที่ (41) เป็นระบบสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น ดังนั้นสามารถใช้วิธีการนิวตันราฟสัน (Newton-Raphson method) ในการแก้สมการ (41) ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^t\ddot{u}_1 \\ {}^t\ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^t u_1 \\ {}^t u_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F({}^t\dot{u}_1) \\ F({}^t\dot{u}_2) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} \tag{42}$$

แทนความเร่งสมการที่ (24) และ ความเร็วสมการที่ (25) แต่อยู่ในรูปเมตริกซ์ลงในสมการที่ (42) จะได้

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{\Delta t^2}({}^{t-\Delta t}u_1 - 2{}^t u_1 + {}^{t+\Delta t}u_1) \\ \frac{1}{\Delta t^2}({}^{t-\Delta t}u_2 - 2{}^t u_2 + {}^{t+\Delta t}u_2) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^t u_1 \\ {}^t u_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F\left(\frac{1}{2\Delta t}(-{}^{t-\Delta t}u_1 + {}^{t+\Delta t}u_1)\right) \\ F(\frac{1}{2\Delta t}(-{}^{t-\Delta t}u_2 + {}^{t+\Delta t}u_2)) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} \tag{43}$$

ใช้เทย์เลอร์ซีรีส์ (Taylor series) ประมาณค่าฟังก์ชัน *R1* และ *R2* จะได้

$$\begin{bmatrix} \partial R_1 / \partial^{t+\Delta t} u_1 & \partial R_1 / \partial^{t+\Delta t} u_2 \\ \partial R_2 / \partial^{t+\Delta t} u_1 & \partial R_2 / \partial^{t+\Delta t} u_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta^{t+\Delta t} u_1 \\ \Delta^{t+\Delta t} u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -R_1 \\ -R_2 \end{Bmatrix} \tag{44}$$

เมื่อสมการที่ (28) ได้ทำการหาค่า $\left[\Delta^{t+\Delta t} u_1, \quad \Delta^{t+\Delta t} u_2\right]^T$ แล้ว ดังนั้นจะสามารถประมาณค่าได้ใหม่คือ

$$\begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}u_1^{i+1} \\ {}^{t+\Delta t}u_2^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}u_1^{i} \\ {}^{t+\Delta t}u_2^{i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta^{t+\Delta t} u_1 \\ \Delta^{t+\Delta t} u_2 \end{bmatrix} \tag{45}$$

ทำการคำนวณวนซ้ำไปเรื่อยๆ จนค่าการขจัดที่ครั้ง i มีความแตกต่างน้อยมากเมื่อเทียบกับครั้ง i+1 โดยใช้ความผิดพลาดของ residual norm การวนซ้ำจะหยุดโดยความผิดพลาดของ residual norm ได้น้อยกว่าค่า e เขียนเป็นสมการได้

$$\left\| R({}^{t+\Delta t}u^{i+1}) \right\| \le e \tag{46}$$

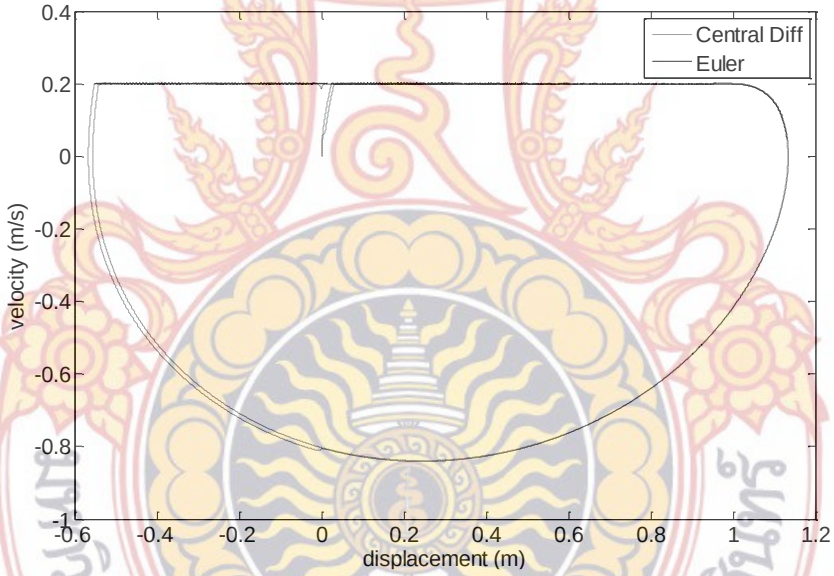
โดยที่ i คือครั้งในการวนซ้ำ

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลรัตนโกสินทร์

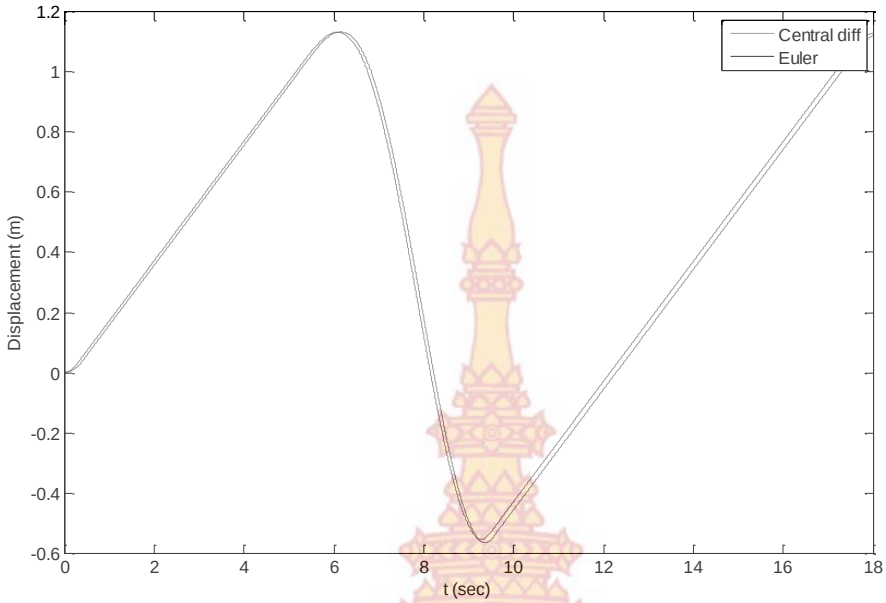
บทที่ 4
ผลการวิจัย/ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

1. ระบบมวลสปริงบนสายพาน 1 DOF

จากหัวข้อที่ 2 วิธีเซนทรัลดิฟเฟอร์เรนและหัวข้อที่ 3 วิธีการออยเลอร์ สำหรับปัญหาติด-ลื่นไถล (stick-slip) ของมวลบนสายพานใน 1 DOF โดยให้พารามิเตอร์ต่างๆดังนี้ มวล m = 1 kg ค่าคงที่ของสปริง k = 1 N/m ความเร็วของสายพาน vdr = 0.2 m/s แรง F_s = 1 N ค่าคงที่ $\varepsilon = 10^6$ และค่าคงที่ δ = 3 s/m ให้ค่าเริ่มต้นของการขจัด u_0 = 0 และ ความเร็วเริ่มต้นที่ $t = 0$ คือ 0 ให้ Δt = 0.001 s ซึ่งสามารถพล็อตเฟสเพรน (phase plane) ได้ดังภาพที่ 4 โดยวิธีเซนทรัลดิฟเฟอร์เรนเป็นเส้นปะและวิธีการออยเลอร์เป็นเส้นเส้นทึบ จะเห็นได้ว่าเส้นกราฟที่ได้จากทั้งสองวิธีมีความใกล้เคียงกัน โดยมวลจะเกิดการติดยึดกับสายพานเมื่อความเร็วของมวลมีค่าเท่ากับ 0.2 m/s หรือเรียกว่าสติคโหมด ในส่วนความเร็วช่วงอื่นเรียกว่าสลิปโหมดคือเกิดการลื่นไถลของมวลขึ้น ในภาพที่ 5 และ 6 แสดงการเกิดการขจัดและความเร็วที่เวลาการเคลื่อนของมวลจาก 0 ถึง 18 วินาที ในช่วงสติคและสลิป



ภาพที่4 เฟสเพรนของมวล m โดยวิธีเซนทรัลดิฟเฟอร์เรนและวิธีการออยเลอร์

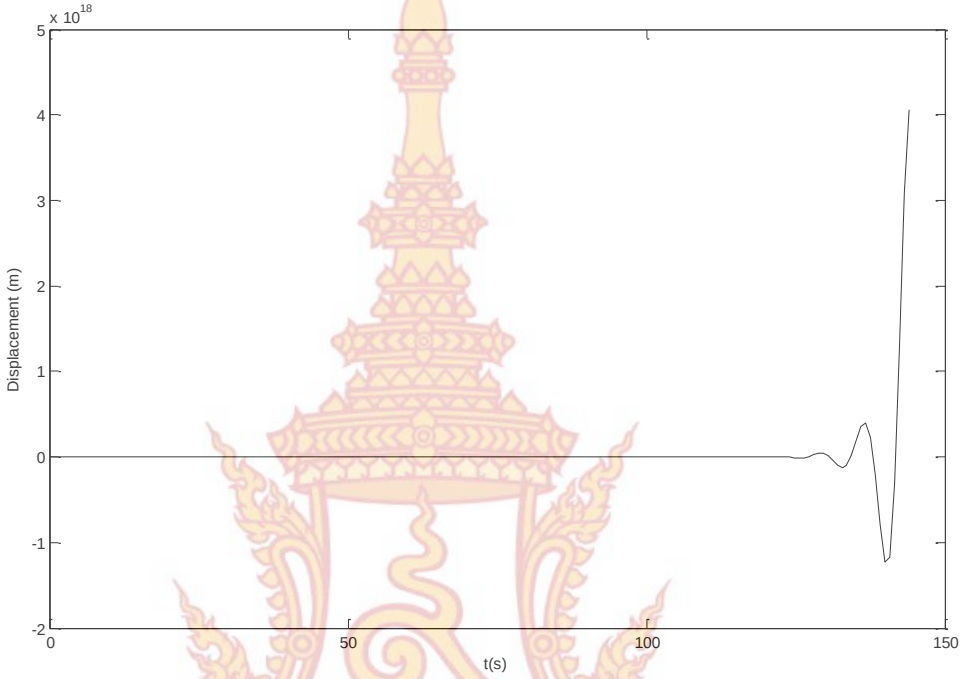


ภาพที่5 การขจัดของมวล m โดยใช้วิธีวิธีเซนทรัลดิฟเฟอร์เรนและวิธีการออยเลอร์

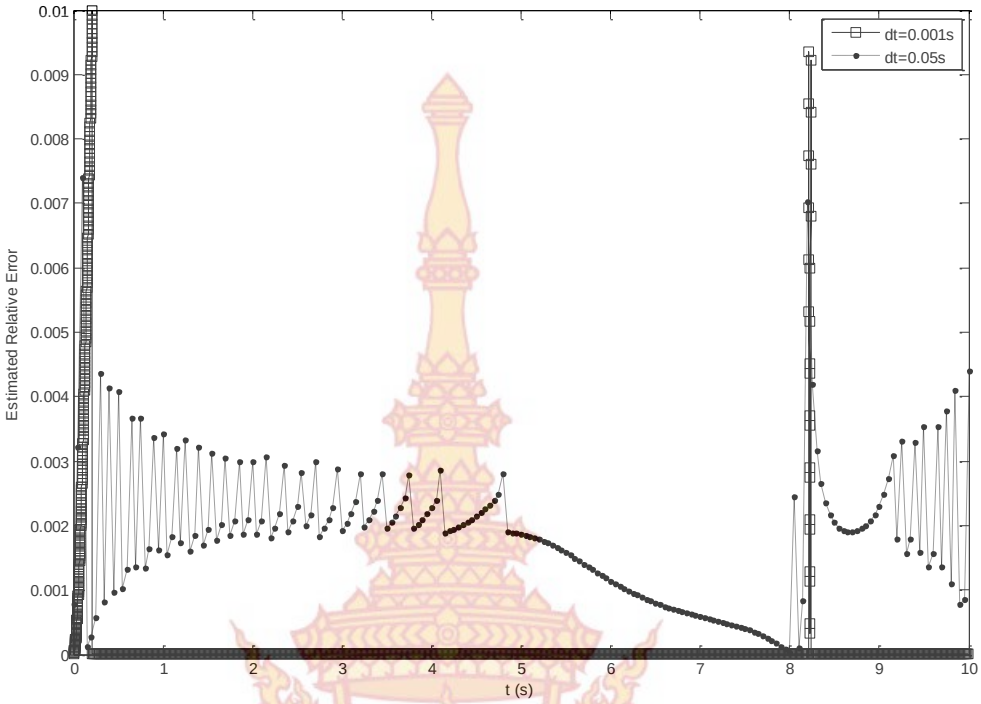
ภาพที่6 ความเร็วของมวล m โดยใช้วิธีวิธีเซนทรัลดิฟเฟอร์เรนและวิธีการออยเลอร์

ค่าความเสถียร (stability) ของวิธีการออยเลอร์ขึ้นอยู่กับค่า Δt ในสมการที่ (38) ถ้า Δt มีค่ามากๆ ผลเฉลยจะมีความไม่เสถียร สมมุติถ้าให้ Δt =0.8 s กราฟของการขจัดเทียบกับเวลาแสดงใน **ภาพที่ 7 ค่าการขจัดจะลู่ออกเมื่อเวลาเท่ากับ 130 s ส่วนวิธีเซนทรัลดิฟเฟอร์เรนความไม่เสถียร**

ของวิธีการจะขึ้นอยู่กับ Δt และ err ภาพที่ 8 ค่าประมาณความผิดพลาดของวิธีเซนทรัลดิฟเฟอร์เรนซึ่งบ่งชี้ว่าเมื่อค่า Δt = 0.001 s ค่าประมาณความผิดพลาดจะค่อนค้างน้อยและเสถียรกว่าค่า Δt = 0.05 s



ภาพที่7 ความไม่เสถียรของวิธีการออยเลอร์เมื่อ Δt มีค่าเท่ากับ 0.8 s

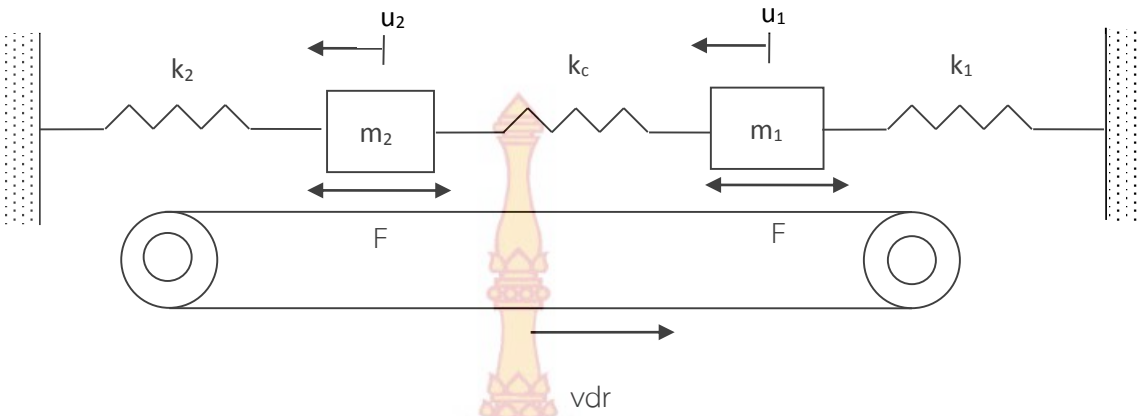


ภาพที่8 ค่าประมาณความผิดพลาด (Estimated relative error, err), dt คือ Δt

2. ระบบมวลสปริงบนสายพาน 2 DOF

ภาพที่ 9 การจำลองระบบมวล สปริง ลำดับขั้นความอิสระ (DOF) เท่ากับ 2 บนสายพานเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว ผลที่ได้จากการจำลองคือการขจัดและความเร็วของมวล $m_1 = m_2 = 1$ และ $k_1 = k_2 = 1$ และ $k_c = 1.2$ สมการที่ (41) และภาพที่ (9) สามารถเขียนสมการการเคลื่อนที่ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^t\ddot{u}_1 \\ {}^t\ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.2 & -1.2 \\ -1.2 & 2.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^t u_1 \\ {}^t u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^t f_1 \\ {}^t f_2 \end{Bmatrix} \tag{47}$$

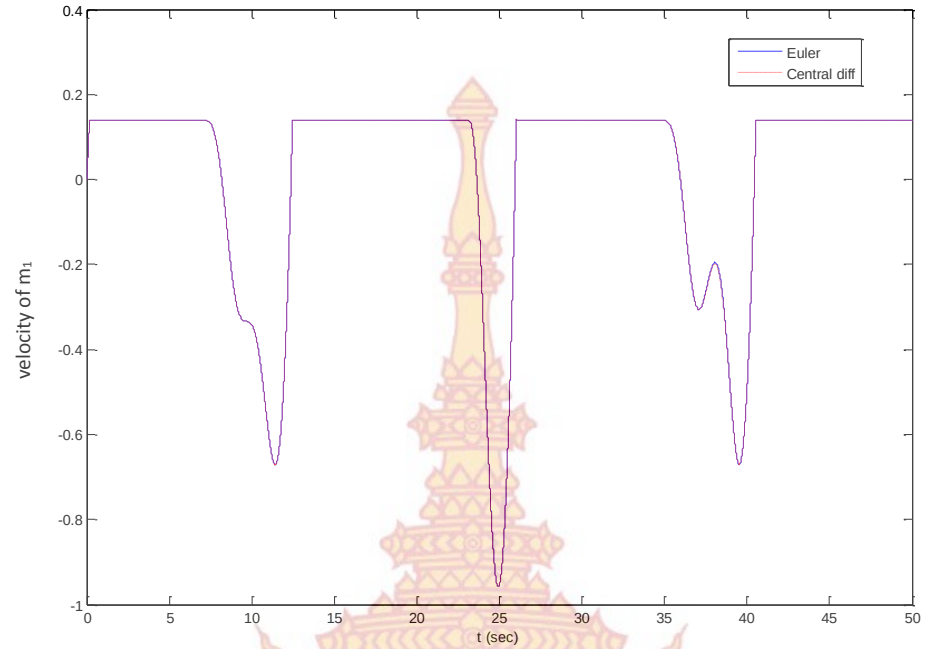


ภาพที่ 9 การจำลองระบบมวล สปริง ลำดับขั้นความอิสระเท่ากับ 2

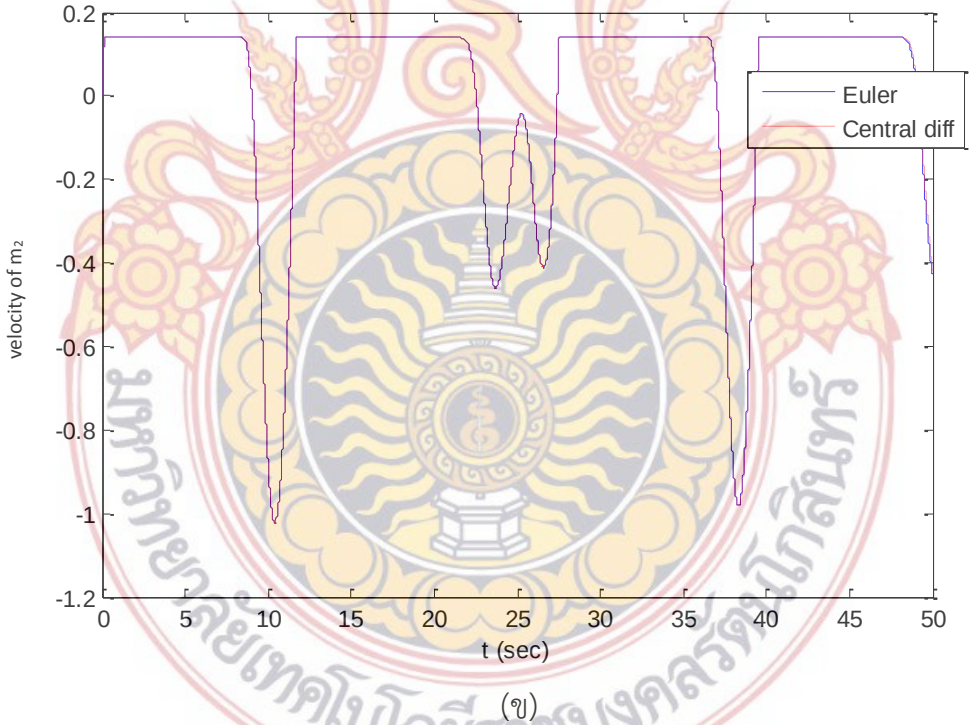
ระบบสายพานลำดับขั้นความอิสระ 2 แสดงได้ดังภาพที่ 9 จากสมการที่ (23) จะต้องให้เมตริกซ์ของแรงเสียดทานในสมการ (43) ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} {}^{t}f_1 \\ {}^{t}f_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{\frac{2}{\pi}\arctan[\varepsilon({}^{t}\dot{u} - vdr)]}{1+\delta\left|{}^{t}\dot{u} - vdr\right|} \\ -\dfrac{(1.3)\frac{2}{\pi}\arctan[\varepsilon({}^{t}\dot{u} - vdr)]}{1+\delta\left|{}^{t}\dot{u} - vdr\right|} \end{Bmatrix} \quad (48)$$

ความเร็วของสายพาน vdr = 0.14 m/s ค่าคงที่ ε = 10^5 และค่าคงที่ δ = 3 ให้ค่าเริ่มต้นของการขจัดที่ *t = 0* คือ 0 และ ความเร็วเริ่มต้นที่ *t = 0* คือ 0 ให้ Δt = 0.001 s ใช้วิธีออยเลอร์ และ เซนทรัลดิฟเฟอร์เรนแบบ 2 DOF หาการขจัดและความเร็วของมวล m_1 และ มวลที่ m_2 แล้วพล็อตความเร็วได้ดังภาพที่ 10 ผลที่ได้จากสองวิธีมีค่าใกล้เคียงกัน แต่อย่างไรก็ตามเมื่อเปลี่ยนค่า Δt มีค่าสูงขึ้นวิธีเซนทรัลดิฟเฟอร์เรนจะให้ผลลู่ออกไม่สามารถหาค่าได้



(ก)



(ข)

ภาพที่ 10 เปรียบเทียบวิธีวิธีออยเลอร์และเซนทรัลดิฟเฟอร์เรน 2-DOF (ก) ความเร็วของมวล m_1 (ข) ความเร็วของมวล m_2

3. การจำลองโดยใช้แท่งวัสดุแทนสปริง

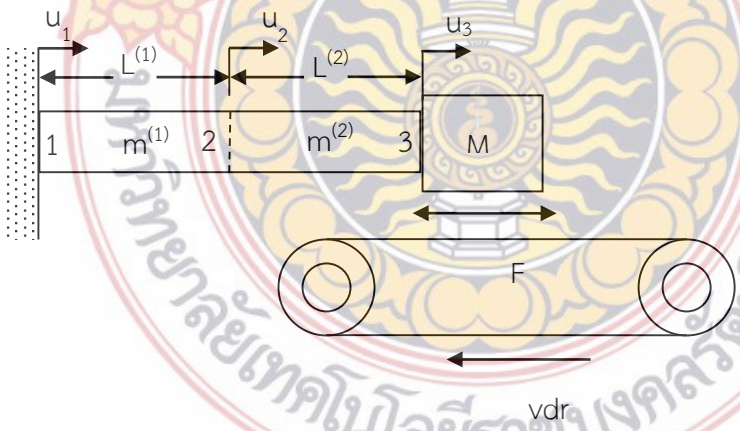
แท่งวัสดุถูกแบ่งเป็นสองเอลิเมนต์ สามโหนดแสดงดังภาพที่ 8 ให้มวลของแต่ละเอลิเมนต์เท่ากับ 0.5 kg ให้ความยาว L ของแต่ละเอลิเมนต์เท่ากับ 1 m พื้นที่หน้าตัด A แต่ละเอลิเมนต์เท่ากับ 1 m^2 *ค่า* มอลัสยืดหยุ่นของแต่ละเอลิเมนต์ E เท่ากับ 1 N/m^2 มวล M มีขนาด 0.5 kg ติดกับโหนดที่ 3 โดยมวล M สัมผัสกับสายพานมีความเร็วของสายพาน vdr = 0.2 m/s แรงเสียดทานสถิต F_s = 1 N ค่าคงที่ ε =10^6 และค่าคงที่ δ = 3 s/m ให้ค่าเริ่มต้นของการจัด u_0 = 0 m และค่าเริ่มต้นของความเร็ว v_0 = 0 m/s ให้ Δt = 0.001 s ใช้สมการที่ (20) ในการสร้างเมตริกซ์เอลิเมนต์จะได้

<u>เอลิเมนต์ที่ 1</u>

$$m^{(1)}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{u}_1(t)\\ \ddot{u}_2(t)\end{Bmatrix}^{(1)}+\frac{E^{(1)}A^{(1)}}{L^{(1)}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\end{Bmatrix}^{(1)}=\begin{Bmatrix}f_1^{ext}\\ f_2^{ext}\end{Bmatrix}^{(1)} \quad (49)$$

<u>เอลิเมนต์ที่ 2</u>

$$m^{(2)}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{u}_2(t)\\ \ddot{u}_3(t)\end{Bmatrix}^{(2)}+\frac{E^{(2)}A^{(2)}}{L^{(2)}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_2(t)\\ u_3(t)\end{Bmatrix}^{(2)}=\begin{Bmatrix}f_2^{ext}\\ f_3^{ext}\end{Bmatrix}^{(2)} \quad (50)$$



ภาพที่ 11 การแบ่งจำนวนเอลิเมนต์และโหนดของเอลิเมนต์แบบแท่ง

<u>เอลิเมนต์รวม</u>

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}m^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}m^{(1)}+\frac{1}{2}m^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}m^{(2)}+M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1^t \\ \ddot{u}_2^t \\ \ddot{u}_3^t \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{E^{(1)}A^{(1)}}{L^{(1)}} & -\frac{E^{(1)}A^{(1)}}{L^{(1)}} & 0 \\ -\frac{E^{(1)}A^{(1)}}{L^{(1)}} & \frac{E^{(1)}A^{(1)}}{L^{(1)}}+\frac{E^{(2)}A^{(2)}}{L^{(2)}} & -\frac{E^{(2)}A^{(2)}}{L^{(2)}} \\ 0 & -\frac{E^{(2)}A^{(2)}}{L^{(2)}} & \frac{E^{(2)}A^{(2)}}{L^{(2)}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^t \\ u_2^t \\ u_3^t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{ext} \\ f_2^{ext} \\ f_3^{ext} \end{Bmatrix} \quad (50)$$

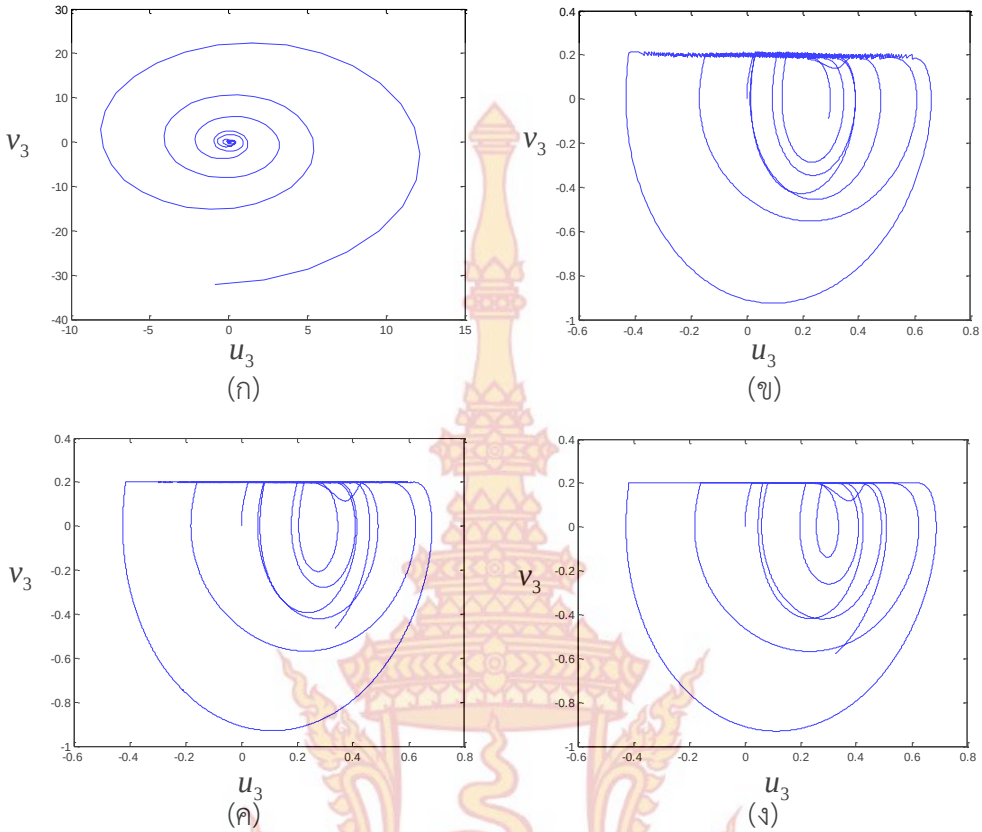
<u>เงื่อนไขขอบเขต</u> $u_1^t = 0$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}m^{(1)}+\frac{1}{2}m^{(2)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}m^{(2)}+M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_2^t \\ \ddot{u}_3^t \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{E^{(1)}A^{(1)}}{L^{(1)}}+\frac{E^{(2)}A^{(2)}}{L^{(2)}} & -\frac{E^{(2)}A^{(2)}}{L^{(2)}} \\ -\frac{E^{(2)}A^{(2)}}{L^{(2)}} & \frac{E^{(2)}A^{(2)}}{L^{(2)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2^t \\ u_3^t \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_2^{ext} \\ f_3^{ext} \end{Bmatrix} \quad (51)$$

แทนค่าตัวเลขต่างๆ จะได้เมตริกซ์รวมดังนี้

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.75 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_2^t \\ \ddot{u}_3^t \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2^t \\ u_3^t \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_2^{ext} \\ f_3^{ext} \end{Bmatrix} \quad (52)$$

ใช้วิธีออยเลอร์แก้สมการและพล็อตเฟสเพรนของโหนดที่ 3 ได้ดังภาพที่ 12 แสดงความไม่เสถียรของคำตอบที่เวลา Δt



ภาพที่ 12 ความไม่เสถียรของการคำนวณและเฟสเพรนของโหนดที่ 3 โดยวิธีการออยเลอร์ (ก) Δt =0.1 s (ข) Δt =0.01 s (ค) Δt =0.001 s (ง) Δt =0.0001 s

บทที่ 5
สรุปผล อภิปรายผลและข้อเสนอแนะ

งานวิจัยนี้ได้แสดงการใช้วิธีการเชิงตัวเลขและไฟไนต์เอลิเมนต์ในการประดิษฐ์สมการสำหรับจำลองการสั่นสะเทือนเมื่อวัตถุมีแรงเสียดทานกระทำ การเกิดปรากฏการณ์สติคสลิปได้ถูกจำลองในงานวิจัยนี้ความเสถียรของวิธีการได้ถูกสังเกตเพื่อใช้ในการปรับปรุงวิธีการในงานวิจัยต่อไป ผลที่ได้กับงานวิจัยนี้สามารถประยุกต์ได้กับการจำลองการสั่นในเบรกและสายพานต่างๆ

วิธีการออยเลอร์มีความง่ายในการกำหนดตัวแปลเพื่อให้เกิดความเสถียรในการคำนวณแต่อย่างไรก็ตามเป็นการยากในการจำลองระบบที่มีหลายลำดับขั้นความอิสระวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถจำลองระบบที่มีขั้นความอิสระได้มากกว่าแต่มีข้อเสียคือมีความยากในการตั้งค่าช่วงเวลา Δt ละค่าความผิดพลาด err ให้มีความเสถียรของการคำนวณ

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลรัตนโกสินทร์

บรรณานุกรม

LEINE,R.I., Campen, D.H. and Kraker, A. “Stick-slip Vibrations Induced by Alternate Friction Models.” **Nonlinear dynamics**. 16 (Jan 1998) : 41-54.

Awrejcewicz, J. and Olejnik, P. “Numerical Analysis of Self-Excited by Friction Chaotic Oscillations in Two-Degree-of-Freedom System Using Exact Henon Method.” **Machine Dynamics Problems**. 26 (2002) : 9-20.

Vrande, B.L., Campen, D.H., and Kraker, A. “An Approximate Analysis of Dry-Friction-Induced Stick-slip Vibrations by a Smoothing Procedure.” **Nonlinear Dynamics**. 19 (December 1999) : 157-169.

Massi, F., Saulot, A., Renouf, M. and Messager, G. **Simulation of Dynamic Instabilities Induced by Sliding Contacts**, Brazil : DINAME, 2013.

Lou G., Wu, T.W. and Bai, Z. “Disk Brake Squeal Prediction Using The ABLE algorithm.” **Journal of Sound and Vibration**. 272 (March 2003) : 731-748.

Ozaki, S., Inanobe C. and Nakano K. “Finite Element Analysis of Precursors to Macroscopic Stick-Slip Motion in Elastic Materials: Analysis of Friction Test As a Boundary Value Problem.” **Tribol Lett**. 55 (May 2014) : 151-163.

Rao SS. **Mechanical Vibrations.** Addison-Wesley Publishing Company, 1995.

Bathe K.J. **Finite Element Procedures.** Prentice Hall, 2006.

Ignatov, I. **Numerical Study of Friction Induced Vibration of a Rail**. Recent Advances in Continuum Mechanics, 2013.

Baillet, L., Errico, S. and Berthier Y. **Influence of Sliding Contact Local Dynamics on Macroscopic Friction Coefficient Variation.** Hal archives-ouvertes, 2006.

Sinou, JJ., Cayer-Barrioz, J. and Berro H. “Friction-Induced Vibration of a Lubricated Mechanical System.” **Tribology International.** 61 (Jan 2013) : 156-168.

Meziane, A., Baillet, L. and Laulagnet B. “Experimental and Numerical Investigation of Friction-Induced Vibration of a Beam-on-Beam in Contact with Friction.” **Applied Acoutics**. 71 (June 2010) : 843-853.

Schutte, J.H., Dannenberg, J.F., Wijnant Y.H. and de Boer A. **An Implicit and Explicit Solver for Contact Problems.** ISMA, 2010.

ภาคผนวก
ตัวอย่างโปรแกรม

โปรแกรมคอมพิวเตอร์โดยวิธีออยเลอร์ 1 DOF

```
%Euler method 1D
clear all
clc
h=0.001;
t=zeros(18,1);
x=zeros(18,1);
w=zeros(18,1);
t(1)=0;
x(1)=0;
w(1)=0;
vdr=0.2;
e=3;
for i=1:10000
t(i+1)=t(i)+h;
x(i+1)=x(i)+w(i)*h;
w(i+1)=w(i)+((-1*(2/pi)*atan((10^6)*(w(i)-vdr))/(1+e*abs(w(i)-vdr)))-
x(i))*h;
end
```

โปรแกรมคอมพิวเตอร์โดยเซนทรัลดิฟเฟอร์เรน 1 DOF

```
%central difference FEM -stick slip
clear all
clc
m = 1/2;
k= 1;
c=0;
Fs=1;
e=10^6;
delta=3;
vdr=0.2;
dt=0.005;
%initial condtion
u0=0;%displacement t=0
v0=0;%velocity t=0
f=(-Fs*2/pi)*atan(e*(v0-vdr))/(1+delta*abs(v0-vdr));
a0= (1/m)*(f-k*u0); %acceleration at t=0
u=zeros(1,3);
u(:,1)=u0-dt*v0+(dt^2)/2*a0;
u(:,2)=u0;
j=zeros(1,1);
for i=1:10000
    ud=0;
    u(i+2)=ud;
    err=1;
    j(i,1)=0;
    while err>=0.01
R=(m/dt^2)*(u(i)-2*u(i+1)+u(i+2))+k*u(i+1)+(Fs*2/pi)*atan(e*((1/2/dt*(-
u(i)+u(i+2))-vdr)))/(1+delta*abs((1/2/dt*(-u(i)+u(i+2))-vdr)));
dR=(m/dt^2)+1/(1+delta*abs(1/2/dt*(-u(i)+u(i+2))-
vdr))*(Fs*e/pi/dt)*(1/(e^2*(1/2/dt*(-u(i)+u(i+2))-
vdr))^2)+(Fs*2/pi)*atan(e*(1/2/dt*(-u(i)+u(i+2))-vdr))*-
```

```
(delta/2/dt)*(1+delta*abs(1/2/dt*(-u(i)+u(i+2))-vdr))^-2*(1/2/dt*(-
u(i)+u(i+2))-vdr)/abs(1/2/dt*(-u(i)+u(i+2))-vdr);
ud=(u(i+2)-R/dR);
err=abs(u(i+2)-ud);
u(i+2)=ud;
j(i,1)=j(i,1)+1;

    end
    err1(i)=err;
   v(i)=1/2/dt*(-u(i)+u(i+2));
end
```

โปรแกรมคอมพิวเตอร์โดยวิธีออยเลอร์ 2 DOF

```
%Euler method 2 DOF
clear all
clc
h=0.0001;
t=zeros(18,1);
x1=zeros(18,1);
w1=zeros(18,1);
t(1)=0;
x1(1)=0;
w1(1)=0;
x2=zeros(18,1);
w2=zeros(18,1);
vdr=0.14;
e=3;
for i=1:500000
t(i+1)=t(i)+h;
x1(i+1)=x1(i)+w1(i)*h;
x2(i+1)=x2(i)+w2(i)*h;
w1(i+1)=w1(i)+((-1*(2/pi)*atan((10^5)*(w1(i)-vdr))/(1+e*abs(w1(i)-
vdr)))-2.2*x1(i)+1.2*x2(i))*h;
w2(i+1)=w2(i)+((-1.3*(2/pi)*atan((10^5)*(w2(i)-vdr))/(1+e*abs(w2(i)-
vdr)))-2.2*x2(i)+1.2*x1(i))*h;
end
```

โปรแกรมคอมพิวเตอร์โดยวิธีเซนทรัลดิฟเฟอร์เรน 2 DOF

```
%central difference FEM -stick slip
clear all
clc
m = [1, 0; 0, 1];
k= [2.2,-1.2;-1.2,2.2];
c=0;
Fs=1;
e=10^5;
delta=3;
vdr=0.14;
dt=0.0001;
%initial condtion
```

```
u0=[0;0];%displacement t=0
v0=[0;0];%velocity t=0
f=[(-Fs*2/pi)*atan(e*(v0(1)-vdr))/(1+delta*abs(v0(1)-vdr));1.3*(-
Fs*2/pi)*atan(e*(v0(2)-vdr))/(1+delta*abs(v0(2)-vdr))];
a0= inv(m)*(f-k*u0); %acceleration at t=0
u=zeros(2,3);
u(:,1)=u0-dt*v0+(dt^2)/2*a0;
u(:,2)=u0;
j=zeros(10,1);
for i=1:500000
    ud=[0;0];
    u(:,i+2)=ud;
    err=1;
    j(i,1)=0;
   while err>=0.00001
R=[(-Fs*2/pi)*atan(e*((1/2/dt*(-u(1,i)+u(1,i+2))-
vdr)))/(1+delta*abs((1/2/dt*(-u(1,i)+u(1,i+2))-vdr)));1.3*(-
Fs*2/pi)*atan(e*((1/2/dt*(-u(2,i)+u(2,i+2))-
vdr)))/(1+delta*abs((1/2/dt*(-u(2,i)+u(2,i+2))-vdr)))]-
k*u(:,i+1)+(1/dt^2)*m*(2*u(:,i+1)-u(:,i)-u(:,i+2));
df1=-Fs*e/(dt*(1+e^2*((1/2)*(-u(1,i)+u(1,i+2))/dt-
vdr)^2)*pi*(1+delta*abs(-(1/2)*(-u(1,i)+u(1,i+2))/dt+vdr)))-
Fs*atan(e*((1/2)*(-u(1,i)+u(1,i+2))/dt-vdr))*delta*sign( -(1/2)*(-
u(1,i)+u(1,i+2))/dt+vdr)/(pi*(1+delta*abs(-(1/2)*(-
u(1,i)+u(1,i+2))/dt+vdr))^2*dt);
df2=-Fs*e/(dt*(1+e^2*((1/2)*(-u(2,i)+u(2,i+2))/dt-
vdr)^2)*pi*(1+delta*abs(-(1/2)*(-u(2,i)+u(2,i+2))/dt+vdr)))-
Fs*atan(e*((1/2)*(-u(2,i)+u(2,i+2))/dt-vdr))*delta*sign( -(1/2)*(-
u(2,i)+u(2,i+2))/dt+vdr)/(pi*(1+delta*abs(-(1/2)*(-
u(2,i)+u(2,i+2))/dt+vdr))^2*dt);
dR=-(1/dt^2)*m+[df1,0;0,1.3*df2];
ud=(u(:,i+2)+inv(dR)*-R);
R1=[(-Fs*2/pi)*atan(e*((1/2/dt*(-u(1,i)+u(1,i+2))-
vdr)))/(1+delta*abs((1/2/dt*(-u(1,i)+u(1,i+2))-vdr)));1.3*(-
Fs*2/pi)*atan(e*((1/2/dt*(-u(2,i)+u(2,i+2))-
vdr)))/(1+delta*abs((1/2/dt*(-u(2,i)+u(2,i+2))-vdr)))]-
k*u(:,i+1)+(1/dt^2)*m*(2*u(:,i+1)-u(:,i)-u(:,i+2));
err=sqrt(R1(1,1)^2+R1(2,1)^2);
u(:,i+2)=ud;
j(i,1)=j(i,1)+1;
    end
  err1(i)=err;
  v(:,i)=1/2/dt*(-u(:,i)+u(:,i+2));
  f1(:,i)=(-Fs*2/pi)*atan(e*(v(2,i)-vdr))/(1+delta*abs(v(2,i)-vdr));
end
```

ประวัติผู้วิจัย

ประวัติผู้วิจัย

1. ชื่อ สกุล ดร.ฤทธิพล จันทราษฎร์

2. ตำแหน่งปัจจุบัน อาจารย์ประจำสาขาวิศวกรรมเครื่องกล

3. หน่วยงานที่สามารถติดต่อได้

หน่วยงาน	สาขาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์
สถานที่อยู่ที่ติดต่อได้สะดวก	มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลรัตนโกสินทร์
	96 หมู่ 3 ถ.พุทธมณฑล สาย 5 ต.ศาลายา
	จ.นครปฐม 73170
หมายเลขโทรศัพท์ที่ทำงาน	0 2889 4585-7 ต่อ 2675
โทรสาร	0 2889 4585-7 ต่อ 2675
โทรศัพท์มือถือ	089 401 7772
E-mail	Rittipol.Cha@rmutr.ac.th

4. ประวัติการศึกษา

ปริญญาเอก	มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์	วศ.ด.	วิศวกรรมเครื่องกล, 2556
ปริญญาโท	LOYOLA MARYMOUNT UNIVERSITY	MS.	วิศวกรรมเครื่องกล, 2546
ปริญญาตรี	มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี	วศ.บ.	วิศวกรรมเครื่องกล, 2541

5. สาขาวิชาการที่มีความชำนาญพิเศษนอกเหนือจากการศึกษา

- Experimental Stress Analysis
- Computational Mechanics

6. ประสบการณ์ที่เกี่ยวข้องกับการบริหารงานวิจัย

-