จำนวนอิสระและจำนวนจุดปกคลุมบนผลคูณมอดูลาร์ของกราฟอย่างง่าย

โดย
บรรจง แก้ววิเศษกุล
ธานินทร์ สิทธิวิรัชธรรม

สนับสนุนงบประมาณโดย
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลรัตนโกสินทร์
ประจำปีงบประมาณ 2557

Independent and Vertex Covering Number on Modular Product of Simple Graph

By

Bunjong Kaewwisetkul
Thanin Sitthiwirattham

Granted by
Rajamangala University of Technology Rattanakosin
Fiscal year 2014

กิตติกรรมประกาศ

การวิจัยจำนวนอิสระและจำนวนจุดปกคลุมบนผลคูณมอดูลาร์ของกราฟอย่างง่าย มีวัตถุประสงค์เพื่อสร้างองค์ความรู้ใหม่ทางคณิตศาสตร์ในสาขาทฤษฎีกราฟที่เกี่ยวกับกราฟพาราមิเตอร์ งานวิจัยนี้สำเร็จลงได้ซึ่งผู้วิจัยระลึกถึงอยู่เสมอ คือ หนังสือ ตำรา วารสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ที่ได้นำมาใช้อ้างอิงซึ่งเป็นประโยชน์ต่อการทำวิจัยในครั้งนี้

ขอขอบคุณมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลรัตนโกสินทร์ที่ให้การสนับสนุนงบประมาณสำหรับดำเนินการวิจัยในครั้งนี้

บรรจง แก้ววิเศษกุล และคณะ

กันยายน 2557

บทคัดย่อ

รหัสโครงการ : A66/2557
ชื่อโครงการ : จำนวนอิสระและจำนวนจุดปกคลุมบนผลคูณมอดูลาร์ของกราฟอย่างง่าย
ชื่อนักวิจัย : ผู้ช่วยศาสตราจารย์บรรจง แก้ววิเศษกุล
รองศาสตราจารย์ธานินทร์ สิทธิวิรัชธรรม

ผลคูณมอดูลาร์ $G_1 \Diamond G_2$ ของกราฟ G_1 และ G_2 คือ กราฟที่มีเซตของจุดเป็น $V(G_1 \Diamond G_2)=V(G_1)\times V(G_2)$ และมีเซตของเส้นเป็น $E(G_1 \Diamond G_2)=\{(u_1,v_1)(u_2,v_2)\,|[u_1u_2 \in E(G_1)$ และ $v_1v_2 \in E(G_2)] \cup [u_1u_2 \notin E(G_1)$ และ $v_1v_2 \notin E(G_2)]\}$

เซตย่อย $U \subset V(G)$ เรียกว่า "เซตอิสระ (independent set)" ของ G เมื่อ induced subgraph $G[U]$ เป็นกราฟโดดเดี่ยว (trivial graph) สำหรับเซตอิสระของ G ที่มีจำนวนจุดมากที่สุด เรียกจำนวนจุดมากที่สุดนั้นว่า "จำนวนอิสระ (independent number)" ของ G

เซตย่อย $U \subset V(G)$ เรียกว่า "จุดปกคลุม (vertex cover)" ของ G เมื่อจุดใน U ปกคลุมเส้นทุกเส้นใน G สำหรับจุดปกคลุมของ G ที่มีจำนวนจุดน้อยที่สุด เรียกจำนวนจุดน้อยที่สุดนั้นว่า "จำนวนจุดปกคลุม (vertex covering number)" ของ G

เซตย่อย $D \subset V(G)$ เรียกว่า "เซตครอบงำ (dominating set or domset)" ของ G เมื่อแต่ละจุดใน $V-D$ ถูกประชิดกับจุดใน D อย่างน้อยหนึ่งจุด สำหรับเซตครอบงำของ G ที่มีจำนวนจุดน้อยที่สุด เรียกจำนวนจุดน้อยที่สุดนั้นว่า "จำนวนครอบงำ (domination number)" ของ G

การวิจัยครั้งนี้ได้สูตรทั่วไปในการหากราฟพารามิเตอร์เชิงจุดบางตัว ได้แก่ จำนวนอิสระ จำนวนจุดปกคลุม และจุดครอบงำ บนผลคูณมอดูลาร์ของกราฟอย่างง่ายและกราฟสองส่วนบริบูรณ์

คำสำคัญ : Independent Number, Vertex Covering Number, Modular Product

---

E-mail Address : bunjong.k@rmutr.ac.th
ระยะเวลาโครงการ : ตุลาคม 2556 - กันยายน 2557

Abstract

Code of project : A66/2557

Project name : Independent and Vertex Covering Number on Modular Product of Simple Graph

Researcher name : Assistant Professor Bunjong Kaewwisetkul

Associate Professor Thanin Sitthiwirattham

The Modular Product $G_1 \Diamond G_2$ of graph of G_1 and G_2 has vertex set $V(G_1 \Diamond G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$ and edge set $E(G_1 \Diamond G_2) = \{(u_1,v_1)(u_2,v_2) \mid [u_1u_2 \in E(G_1) \text{ and } v_1v_2 \in E(G_2)] \cup [u_1u_2 \notin E(G_1) \text{ and } v_1v_2 \notin E(G_2)]\}$.

A subset U of the vertex set $V(G)$ of G is said to be an independent set of G if the induced subgraph $G[U]$ is a trivial graph. An independent set of G with maximum number of vertices is called a maximum independent set of G. The number of vertices of a maximum independent set of G is called the independent number of G.

A vertex of graph G is said to cover the edges incident with it, and a vertex cover of a graph G is a set of vertices covering all the edges of G. The minimum cardinality of a vertex cover of a graph G is called the vertex covering number of G.

A dominating set (or domset) of graph G is a subset D of $V(G)$ such that each vertex of $V-D$ is adjacent to at least one vertex of D. The minimum cardinality of a dominating set of a graph G is called the domination number of G.

In this research, we determine generalizations of some of the vertex-graph parameters are independent number, vertex covering number and domination number on Modular product of simple graph and complete bipartite graph.

Keywords : Independent Number, Vertex Covering Number, Modular Product

---

E-mail Address : bunjong.k@rmutr.ac.th

Period of project : October 2013 – September 2014

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

สารบัญภาพ

บทที่ 1
บทนำ

1. ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ทฤษฎีกราฟ (Graph Theory) มีประวัติความเป็นมาตั้งแต่ปี ค.ศ.1736 จากนักคณิตศาสตร์ชาวสวิสเซอร์แลนด์ชื่อ เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ (Leonhard Euler) ที่ได้แก้ปัญหา การเดินข้ามสะพานที่เมืองเคอนิกส์เบิร์ก (Konigsberg Bridge Problem) ผลงานของออยเลอร์เป็นจุดเริ่มต้นของสาขาใหม่ทางคณิตศาสตร์ที่เรียกว่า ทฤษฎีกราฟ ทฤษฎีกราฟได้ถูกนำไปประยุกต์ใช้ในการสร้างแบบจำลอง และแก้ไขปัญหามากมายในสาขาต่างๆ เช่น วิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ จิตวิทยา สังคมศาสตร์ ภาษาศาสตร์ ฯลฯ และในการแก้ปัญหาใดๆนั้น เราจำเป็นที่ต้องมีความรู้และเข้าใจในทางทฤษฎีเป็นอย่างดี เพราะฉะนั้น การคิดค้นความรู้และทฤษฎีบทใหม่จึงเป็นสิ่งที่จำเป็น ด้วยเหตุนี้ ผู้วิจัยจึงสนใจในการสร้างทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับโครงสร้างของกราฟและการกระทำบนกราฟต่างๆ ซึ่งในที่นี้ก็คือ กราฟพารามิเตอร์บนกราฟที่เกิดจากผลคูณของกราฟสองกราฟนั่นเอง กราฟที่จะศึกษาจะเป็นกราฟอย่างง่ายและสัญลักษณ์ต่างๆที่ใช้เป็นสัญลักษณ์มาตรฐานที่พบในตำราทางทฤษฎีกราฟทั่วไป

ในการศึกษาผลงานวิจัยทางทฤษฎีกราฟ จะพบว่ามีผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับกราฟพารามิเตอร์มากมาย เช่น Sum Number, Clique Number, Hamiltonian Number, Matching Number, Independent Number, Chromatic Number, Domination Number, Forest Number และ Decycling Number บนกราฟลักษณะเฉพาะต่างๆ เช่น Tree, Weel, Complement of Graph, Regular Graph, Cubic Graph, Square of Complete Graphs และ Weighted Graphs และผลงานวิจัยที่ศึกษากราฟพารามิเตอร์บนกราฟที่เกิดจากการกระทำบนกราฟ เช่น กราฟร่วม (Joined Graph), กราฟผลต่าง (Difference Graph), กราฟเติมเต็ม (Complement Graph) และผลคูณต่างๆ เช่น ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian Product), ผลคูณโครเน็กเกอร์หรือผลคูณเท็นเซอร์หรือผลคูณตรง (Kronecker, Tensor, Direct Product), ผลคูณเข้ม (Strong Product) และผลคูณเล็กซิโคกราฟิกคัล (Lexicographical Product) ของกราฟอย่างง่ายใดๆกับกราฟลักษณะเฉพาะต่างๆ

ผู้วิจัยมีความประสงค์ที่จะเพื่อหาค่ากราฟพารามิเตอร์เชิงจุด (Vertex-Graph Parameter) สามตัว ได้แก่ จำนวนอิสระ (Independent Number : α), จำนวนจุดปกคลุม (Vertex Covering Number : β) และจำนวนจุดครอบงำ (Domination Number : γ) บนผลคูณมอดูลาร์ (Modular Product) ของกราฟอย่างง่ายและกราฟสองส่วนบริบูรณ์ (Complete Bipartite Graph) ในการวิจัยในครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ทฤษฎีบทในการหาค่าของจำนวนอิสระ จำนวนจุดปกคลุม และจำนวนจุดครอบงำบนผลคูณมอดูลาร์ของกราฟอย่างง่ายและกราฟสองส่วนบริบูรณ์ ซึ่งองค์ความรู้ใหม่ที่ได้จะเป็นพื้นฐานในการพัฒนางานวิจัยในระดับสูงขึ้นต่อไปในสาขาวิชาทฤษฎีกราฟ ซึ่งจะนำไปสู่การพัฒนาเพื่อประยุกต์ใช้แก้ปัญหาต่างๆ ในชีวิตจริงต่อไปได้

2. วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. สร้างทฤษฎีบทสำหรับการค่ากราฟพารามิเตอร์เชิงจุด จำนวนอิสระบนผลคูณมอดูลาร์ของกราฟอย่างง่ายและกราฟสองส่วนบริบูรณ์

2. สร้างทฤษฎีบทสำหรับการค่ากราฟพารามิเตอร์เชิงจุด จำนวนจุดปกคลุมบนผลคูณมอดูลาร์ของกราฟอย่างง่ายและกราฟสองส่วนบริบูรณ์

3. สร้างทฤษฎีบทสำหรับการค่ากราฟพารามิเตอร์เชิงจุด จำนวนจุดครอบงำบนผลคูณมอดูลาร์ของกราฟอย่างง่ายและกราฟสองส่วนบริบูรณ์

3. กรอบแนวคิดการวิจัย

สร้างและพิสูจน์ทฤษฎีบทในการหาค่ากราฟพารามิเตอร์เชิงจุดสามตัว คือ จำนวนอิสระ จำนวนจุดปกคลุม และจำนวนจุดครอบงำ บนกราฟของผลคูณมอดูลาร์ระหว่างกราฟอย่างง่ายใดๆกับกราฟสองส่วนบริบูรณ์

4. นิยามศัพท์

ผลคูณมอดูลาร์ (Modular Product) $G_1\Diamond G_2$ ของกราฟ G_1 และ G_2 คือ กราฟที่มีเซตของจุดเป็น $V(G_1\Diamond G_2)=V(G_1)\times V(G_2)$ และมีเซตของเส้นเป็น $E(G_1\Diamond G_2)=\{(u_1,v_1)(u_2,v_2)\,|\,[u_1u_2\in E(G_1)$ และ $v_1v_2\in E(G_2)]\cup[u_1u_2\notin E(G_1)$ และ $v_1v_2\notin E(G_2)]\}$

เซตย่อย $U\subset V(G)$ เรียกว่า “เซตอิสระ (independent set)” ของ G เมื่อ induced subgraph $G[U]$ เป็นกราฟโดดเดี่ยว (trivial graph) สำหรับเซตอิสระของ G ที่มีจำนวนจุดมากที่สุด เรียกจำนวนจุดมากที่สุดนั้นว่า “จำนวนอิสระ (independent number)” ของ G

เซตย่อย $U\subset V(G)$ เรียกว่า “จุดปกคลุม (vertex cover)” ของ G เมื่อจุดใน U ปกคลุมเส้นทุกเส้นใน G สำหรับจุดปกคลุมของ G ที่มีจำนวนจุดน้อยที่สุด เรียกจำนวนจุดน้อยที่สุดนั้นว่า “จำนวนจุดปกคลุม (vertex covering number)” ของ G

เซตย่อย $D\subset V(G)$ เรียกว่า “เซตครอบงำ (dominating set or domset)” ของ G เมื่อแต่ละจุดใน $V-D$ ถูกประชิดกับจุดใน D อย่างน้อยหนึ่งจุด สำหรับเซตครอบงำของ G ที่มีจำนวนจุดน้อยที่สุด เรียกจำนวนจุดน้อยที่สุดนั้นว่า “จำนวนครอบงำ (domination number)” ของ G

5. ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้องค์ความรู้ใหม่และทฤษฎีบทในการหาค่ากราฟพารามิเตอร์เชิงจุดบนผลคูณมอดูลาร์ระหว่างกราฟอย่างง่ายใดๆกับกราฟสองส่วนบริบูรณ์

2. ได้ผลงานวิจัยตีพิมพ์ในวารสารนานาชาติเพื่อเป็นการเผยแพร่ผลงานและชื่อเสียงของนักคณิตศาสตร์ไทย

บทที่ 2
ทบทวนวรรณกรรมที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยจำนวนอิสระและจำนวนจุดปกคลุมบนผลคูณมอดูลาร์ของกราฟอย่างง่าย ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องตามลำดับดังนี้

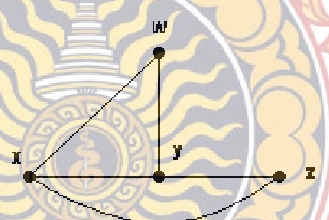
1. บทนิยามเกี่ยวกับทฤษฎีกราฟเบื้องต้น
2. สมบัติของผลคูณโครเน็คเกอร์
3. สมบัติของผลคูณมอดูลาร์
4. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

1. บทนิยามเกี่ยวกับทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

บทนิยาม 1.1 กราฟ $G=(V,E)$ ประกอบไปด้วยเซต $V\neq\phi$ และเซต E ซึ่งเป็นเซตของคู่ที่ไม่เป็นลำดับ เรียกสมาชิกของ E ว่าเส้น (edge หรือ line)

ถ้าต้องการระบุว่า V เป็นเซตของจุด และ E เป็นเซตของเส้นของกราฟ G จะเขียนแทนด้วย $V(G)$ และ $E(G)$

ตัวอย่าง 1.1 ให้ G เป็นกราฟที่แสดงดังรูป



ภาพที่ 1 จุดและเส้น

จะได้ $V(G)=\{w,x,y,z\}$ และ $E(G)=\{xw,xy,xz,yw,yz\}$

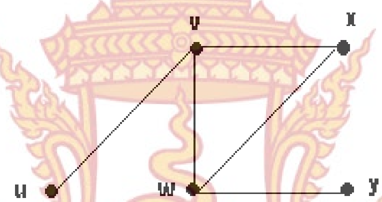
บทนิยาม 1.2 ให้ u และ v เป็นจุดในกราฟ G เรากล่าวว่า u ประชิด (adjacent) กับ v เมื่อมีเส้นใน G เชื่อมระหว่างจุด u และ v และจะเขียนแทนเส้นดังกล่าวด้วย uv และจะเรียกจุด u และ v ว่าจุดปลายของเส้น uv

ถ้า e = uv เป็นเส้นในกราฟ G แล้ว เรากล่าวว่าจุด u ตกกระทบ (incident) กับเส้น e หรือเส้น e ตกกระทบกับจุด u

และถ้า e ≠ f โดยที่ f เป็นเส้นใน G ที่ตกกระทบกับจุดเดียวกันแล้ว เรากล่าวว่า e ประชิดกับ f หรือ e และ f ประชิดกัน

โดยทั่วไปเราจะแทนจุดในกราฟด้วยจุดในระนาบ และเส้นในกราฟด้วยเส้นที่เชื่อมระหว่างจุดสองจุดในระนาบ และเป็นที่เข้าใจกันว่าในการเขียนรูปของกราฟนั้นจะไม่มีเส้นใดตัดกับตัวมันเองหรือลากผ่านจุดที่ไม่ใช่จุดปลายของเส้นนั้น ยิ่งไปกว่านั้นเส้นสองเส้นของกราฟอาจลากผ่านกันหรือตัดกันได้โดยไม่ทำให้เกิดจุดใหม่

ตัวอย่าง 1.2 จากกราฟในภาพที่ 2 จะเห็นว่าจุด x ประชิดกับ v, w และจุด v ตกกระทบกับเส้น vu, vw และ vx



ภาพที่ 2 จุดประชิดและจุดตกกระทบ

บทนิยาม 1.3 เรียกกราฟที่ไม่มีเส้นหลายชั้น (multiple edges) และไม่มีรูปบ่วง (loop) ว่า กราฟอย่างง่าย (simple graph) โดยที่

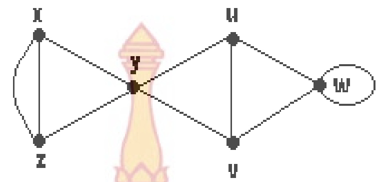
เส้นหลายชั้น คือ มีหลายเส้นที่เชื่อมระหว่างจุด 2 จุด

รูปบ่วง คือ ใน 1 จุดจะมีเส้นตัวมันเอง

ตัวอย่าง 1.3 แสดงภาพของกราฟอย่างง่ายที่มีจำนวนจุดเป็น 3

ภาพที่ 3 กราฟอย่างง่ายที่มีจำนวนจุดเป็น 3

ตัวอย่าง 1.4 แสดงภาพของกราฟที่มีเส้นหลายชั้นและมีรูปบ่วง ดังนั้น ไม่เป็นกราฟอย่างง่าย



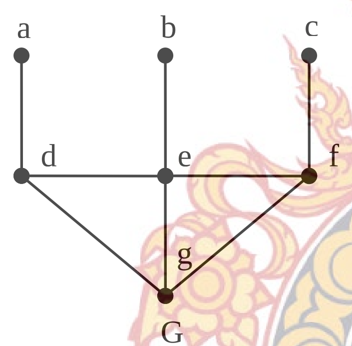
ภาพที่ 4 กราฟที่ไม่ใช่กราฟอย่างง่าย

บทนิยาม 1.4 ให้ u เป็นจุดในกราฟ G ดีกรี (degree) ของ u ใน G เขียนแทนด้วย $d_G(u)$ คือ จำนวนของเส้นใน G ที่ตกกระทบกับจุด u และจุดที่มีดีกรี 1 จะเรียกว่า จุดปลาย (end-vertex)

Maximum degree คือ ดีกรีที่มากที่สุดในกราฟ G แทนด้วย $\Delta(G)$

Minimum degree คือ ดีกรีที่น้อยที่สุดในกราฟ G แทนด้วย $\delta(G)$

ตัวอย่าง 1.5 ให้ G เป็นกราฟที่แสดงดังรูป



จะได้ว่า $\Delta(G) = 4$, $\delta(G) = 1$

และ $d_G(a) = 1$, $d_G(b) = 1$

$d_G(c) = 1$, $d_G(d) = 3$

$d_G(e) = 4$, $d_G(f) = 3$

$d_G(g) = 3$

ภาพที่ 5 ดีกรีมากที่สุดและดีกรีน้อยที่สุด

บทนิยาม 1.5 จะกล่าวว่า $H(V_H,E_H)$ เป็นกราฟย่อย (subgraph) ของกราฟ $G(V_G,E_G)$ เมื่อ $V_H \subseteq V_G$ และ $E_H \subseteq E_G$ และจะกล่าวว่า H เป็นกราฟย่อยแผ่ทั่ว (spanning subgraph) ของ G เมื่อ H เป็นกราฟย่อยของ G และ $V_H = V_G$

ตัวอย่าง 1.6 ภาพที่ 6 แสดงให้เห็นกราฟ H เป็นกราฟย่อยของ G

กราฟ G　　　　กราฟ H

ภาพที่ 6 กราฟย่อย

บทนิยาม 1.6 ให้ u และ v เป็นจุดใดๆในกราฟ (u และ v อาจเป็นจุดเดียวกัน) ทางเดิน u-v (u-v walk) ใน G คือลำดับสลับของจุดและเส้น เขียนแทนด้วย

$$w = \langle u = u_0, e_1, u_1, e_2, u_2, \ldots, u_{n-1}, e_n, u_n = v \rangle$$

ที่เริ่มต้นด้วยจุด u และจบด้วยจุด v และสำหรับ i = 1,2,...,n จุดปลายของเส้น e_i คือ u_{i-1} และ u_i

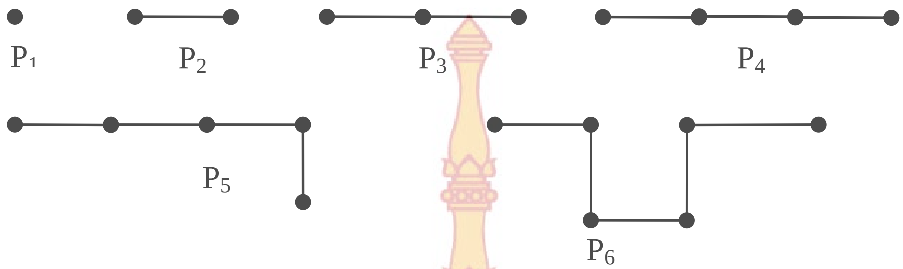
บทนิยาม 1.7 ความยาวของทางเดิน u-v คือ จำนวนของเส้นในลำดับ ในกรณีที่ความยาวของทางเดินเป็น 0 จะเรียกทางเดินนั้นว่า ทางเดินโดดเดี่ยว (trivial walk) เรียก $u_0 = u$ และ $u_n = v$ ว่า จุดเริ่มต้น (origin) และจุดปลาย (end point) ของทางเดิน u-v เรียกจุด $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ ว่า จุดภายใน (interval vertices)

บทนิยาม 1.8 จะกล่าวว่าทางเดิน u-v เป็นทางเดินปิด (closed walk) เมื่อ u = v และจะเป็นทางเดินเปิด (open walk) เมื่อ $u \neq v$

บทนิยาม 1.9 เรากล่าวว่า u-v เป็นทางเดินไม่ซ้ำ (trail) เมื่อเส้นในทางเดิน u-v ไม่ซ้ำกัน

บทนิยาม 1.10 เรากล่าวว่า u-v เป็นวิถี (path) เมื่อเป็นทางเดินไม่ซ้ำ และไม่มีจุดซ้ำ และเขียนแทนวิถีที่มีจำนวนจุดเป็น n ด้วย P_n

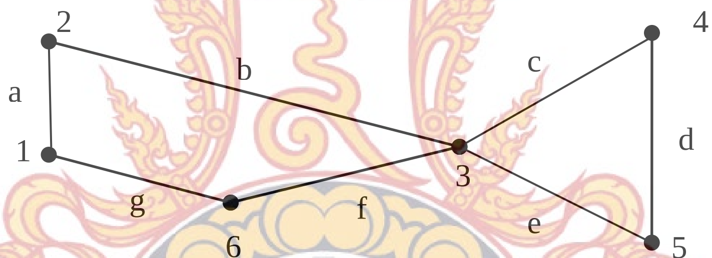
ตัวอย่าง 1.7 ภาพที่ 7 แสดงวิถีที่มีจำนวนจุดเป็น 1 ถึง 6



ภาพที่ 7 วิถีที่มีจำนวนจุดเป็น 1 ถึง 6

บทนิยาม 1.11 เรียกทางเดินไม่ซ้ำปิดที่ไม่ใช่ทางเดินโดดเดี่ยวว่า วง (circuit) และเรียก **วง ที่มี**จุดเริ่มต้นและจุดภายในไม่ซ้ำกันว่า วัฏจักร (cycle)

ตัวอย่าง 1.8 ภาพที่ 8 แสดงทางเดิน



ภาพที่ 8 ทางเดิน

จากกราฟในภาพที่ 8

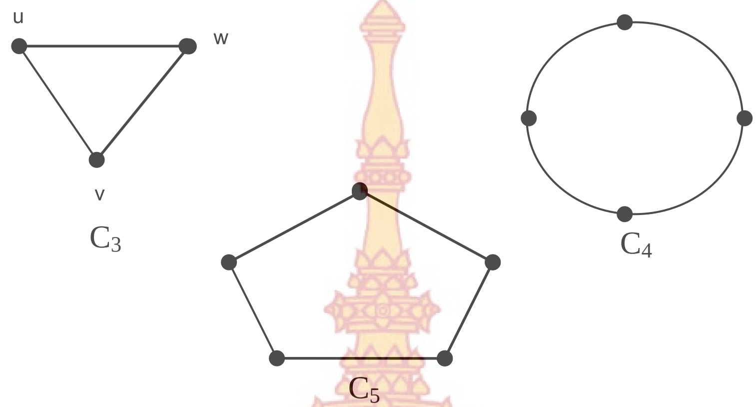
ลำดับ 1,a,2,b,3 f,6,f,3,c4,d,5 เป็นทางเดิน 1-5 ซึ่งมีความยาวเท่ากับ 6

ทางเดิน <1,a,2,b,3,c,4,d,5,e,3,f,6> เป็นทางเดินไม่ซ้ำ ซึ่งมีความยาวเท่ากับ 6

ทางเดิน <1,a,2b,3,f,6> เป็นวิถี ซึ่งมีความยาวเท่ากับ 3

บทนิยาม 1.12 เรียกวัฏจักรที่มีความยาวเป็นคู่ว่า วัฏจักรคู่ (even cycle) และเรียกวัฏจักร**ที่มีความ**ยาวเป็นคี่ว่า วัฏจักรคี่ (odd cycle) เขียนแทนวัฏจักรที่มีจำนวนจุดเป็น n ด้วย C_n

ตัวอย่าง 1.9 ภาพที่ 9 แสดงกราฟของวัฏจักร



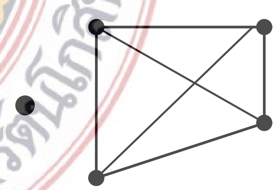
ภาพที่ 9 วัฏจักรคู่และวัฏจักรคี่

บทนิยาม 1.13 ให้ G = (V,E) เป็นกราฟใดๆ และ $\phi \neq V' \subseteq V(G)$ เรียกสับกราฟ **G′ ของ** G ว่าเป็น "อินดิวซ์สับกราฟ (Induced Subgraph) ของ G ที่เกิดจาก V ′" เมื่อสับกราฟ G ′ ของ G มีเซตของจุดเท่ากับ V′ และ เซตของเส้นเท่ากับเซตของเส้นใน G ที่จุดปลายทั้ง 2 ของเส้นแต่ละ**เส้นเป็น**จุดใน V′ เขียนแทนด้วย G [V′]

บทนิยาม 1.14 ให้ u และ v เป็นจุดใดๆ ในกราฟ G เรากล่าวว่า u และ v เชื่อมโยง**กันได้** (connect) เมื่อมีวิถี u-v และกล่าวว่ากราฟ G เป็นกราฟเชื่อมโยง (connected graphs) เมื่อจุด**สองจุด**ใดๆใน G เชื่อมโยงกันได้

ตัวอย่าง 1.10 ตัวอย่างของกราฟเชื่อมโยง (connected graphs)

ภาพที่ 10 กราฟเชื่อมโยง

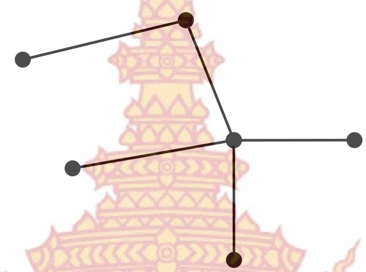


ภาพที่ 11 กราฟไม่เชื่อมโยง

บทนิยาม 1.15 จะเรียก G ว่าเป็นกราฟโดดเดี่ยว (trivial graph) ก็ต่อเมื่อ $E(G) = \phi$ แต่ $V(G) \neq \phi$ เขียนแทนกราฟโดดเดี่ยวที่มี n จุดด้วย $\overline{K_n}$

บทนิยาม 1.16 G เป็นกราฟต้นไม้ (tree) เมื่อ G เป็นกราฟเชื่อมโยงและไม่มีวัฏจักร

ตัวอย่าง 1.11 ตัวอย่างของกราฟต้นไม้



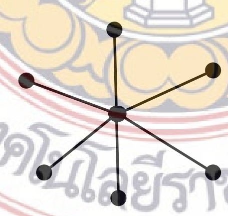
ภาพที่ 12 กราฟต้นไม้

สมบัติของกราฟต้นไม้

1. G เป็นกราฟต้นไม้ ก็ต่อเมื่อ G เป็นกราฟเชื่อมโยงและ $e(G) = n(G)-1$
2. ถ้า G เป็นกราฟต้นไม้แล้ว G เป็นกราฟสองส่วน เนื่องจากว่ากราฟต้นไม้จะไม่มีทั้งวัฏจักรคู่และวัฏจักรคี่ จึงทำให้เกิดเป็นกราฟสองส่วน

บทนิยาม 1.17 กราฟดาวที่มีจำนวนจุดเท่ากับ n คือ กราฟที่มี 1 จุด ที่มีดีกรี n-1 จุดที่เหลือมีดีกรีเท่ากับ 1

ตัวอย่าง 1.12 : ตัวอย่างของกราฟดาว



ภาพที่ 13 กราฟดาว

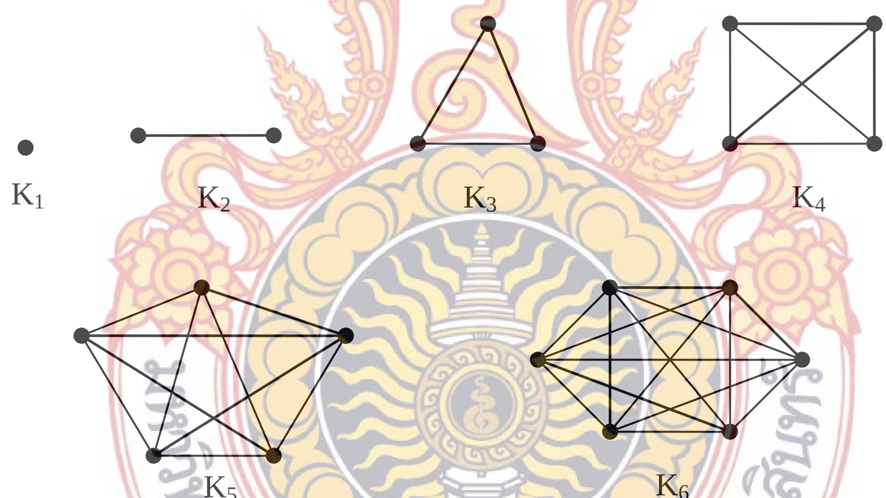
<u>**ข้อสังเกต**</u> กราฟดาว คือกราฟต้นไม้

บทนิยาม 1.18 ให้ G = (V,E) เป็นกราฟอย่างง่าย ถ้าเราสามารถแบ่งกั้น (partition) เซต V โดยที่ $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup \ldots \cup V_k$ V และ $V_i \cap V_j = \phi$ สำหรับ $i \neq j$ แล้วจะกล่าวว่า G เป็น**กราฟ k ส่วน** (k-partite graph) และเรียก $(v_1,v_2,\ldots,v_k)$ ว่าเป็นเซตแบ่งกั้นของ G ในกรณีที่ k = 2 จะเรียก **กราฟ 2-พาร์ไท** ว่า กราฟสองส่วน (bipartite graph)

บทนิยาม 1.19 ให้ G เป็นกราฟอย่างง่าย เรากล่าวว่า G เป็นกราฟบริบูรณ์ (complete graph) เมื่อจุด 2 จุดใดๆที่ต่างกันของ G เป็นจุดประชิดกัน เราจะเขียนแทนกราฟบริบูรณ์ที่มีจำนวนจุด n **จุดด้วย** K_n

__**ข้อสังเกต**__ จำนวนด้านของกราฟบริบูรณ์ คือ $\frac{n(n-1)}{2}$ เมื่อ n คือจำนวนจุดของกราฟดังกล่าว

ตัวอย่าง 1.13 กราฟในภาพที่ 14 เป็นกราฟบริบูรณ์ที่มีจำนวนจุดเป็น 1,2,3,...,6 ตามลำดับ



ภาพที่ 14 กราฟบริบูรณ์ที่มีจำนวนจุดเป็น 1,2,3,...,6

บทนิยาม 1.20 เรากล่าวว่ากราฟอย่างง่าย G เป็นกราฟสองส่วนบริบูรณ์ (complete bipartite graph) เมื่อ G เป็นกราฟสองส่วนบริบูรณ์ที่มีเซตแบ่งกั้น (V_1,V_2) ซึ่งมีคุณสมบัติว่า ถ้า $u \in V_i$ และ $v \in V_j$ โดยที่ $i \neq j$ แล้ว $uv \in E(G)$

ตัวอย่าง 1.14 ตัวอย่างของกราฟสองส่วนบริบูรณ์

$K_{1,4}$ $K_{3,3}$

ภาพที่ 15 กราฟสองส่วนบริบูรณ์

2. สมบัติของผลคูณโครเน็คเกอร์ (Properties of Kronecker Products)

บทนิยาม 2.1 ให้ G_1 และ G_2 เป็นกราฟอย่างง่าย ผลคูณโครเน็คเกอร์ (Kronecker Products) ของ G_1 และ G_2 เขียนแทนด้วย $G_1 \otimes G_2$ คือ กราฟที่มีเซตของจุดคือ $V(G_1 \otimes G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$ และเซตของเส้น $E(G_1 \otimes G_2) = \{(u_1,v_1)(u_2,v_2) \mid u_1u_2 \in E(G_1)$ และ $v_1v_2 \in E(G_2)\}$

ทฤษฎีบท 2.1 ให้ $H = G_1 \otimes G_2$ จะได้ว่า

1. $|V(H)| = |V(G_1)||V(G_2)|$
2. $|E(H)| = 2|E(G_1)||E(G_2)|$
3. สำหรับ $(u,v) \in V(H)$, $d_H(u,v) = d_{G_1}(u)d_{G_2}(v)$

ทฤษฎีบท 2.2 ให้ G_1 และ G_2 เป็นกราฟต่อเนื่อง กราฟ $H = G_1 \otimes G_2$ เป็นกราฟต่อเนื่อง ก็ต่อเมื่อ G_1 หรือ G_2 มีวัฏจักรคี่

ทฤษฎีบท 2.3 ให้ G_1 และ G_2 เป็นกราฟต่อเนื่องที่ไม่มีวัฏจักรคี่ แล้ว $H = G_1 \otimes G_2$ ประกอบด้วยสองคอมโพแนนท์ที่เป็นกราฟต่อเนื่อง

ทฤษฎีบท 2.4 ให้ G เป็นกราฟต่อเนื่องอันดับ m กราฟของ $K_{m,n} \otimes G$ คือ $\bigcup_{i=1}^{m} H_i$; $H_i = \bigcup_{j=m+1}^{m+n} H_{ij}$ เมื่อ $V(H_{ij}) = W_i \cup W_j$, $W_i = \{(i,1),(i,2),\ldots,(i,m)\}$, $W_j = \{(j,1),(j,2),\ldots,(j,m)\}$; $i<j$ และ $E(H_{ij})=\{(i,u)(j,v) \mid uv \in E(G)\}$ และ ถ้า G ไม่มีวัฏจักรคี่ แล้วจะได้ว่า แต่ละ H_{ij} จะประกอบด้วยสองคอมโพแนนท์ต่อเนื่องที่สมสัณฐานกับกราฟ G

3. สมบัติของผลคูณมอดูลาร์ (Properties of Modular Products)

บทนิยาม 3.1 ให้ G_1 และ G_2 เป็นกราฟอย่างง่าย ผลคูณมอดูลาร์ (Modular Products) ของ G_1 และ G_2 เขียนแทนด้วย $G_1 \Diamond G_2$ คือ กราฟที่มีเซตของจุดคือ $V(G_1 \Diamond G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$ และเซตของเส้นคือ $E(G_1 \Diamond G_2) = \{(u_1,v_1)(u_2,v_2) \mid [u_1u_2 \in E(G_1)$ และ $v_1v_2 \in E(G_2)] \cup [u_1u_2 \notin E(G_1)$ และ $v_1v_2 \notin E(G_2)]\}$

ทฤษฎีบท 3.1 ให้ $H = G_1 \Diamond G_2$ จะได้ว่า

1. $|V(H)| = |V(G_1)||V(G_2)|$
2. $|E(H)| = 2|E(G_1)||E(G_2)| + 2\left|V\left(G_1^C\right)\right|\left|V\left(G_2^C\right)\right|$
3. สำหรับ $(u,v) \in V(H)$, $d_H((u,v)) = d_{G_1}(v)d_{G_2}(v) + d_{G_1^C}(v) + d_{G_2^C}(v)$

ทฤษฎีบท 3.2 ให้ K_n และ G เป็นกราฟบริบูรณ์และกราฟอย่างง่ายตามลำดับ แล้ว $K_n \Diamond G = K_n \otimes G$

ทฤษฎีบท 3.3 ให้ G_1 และ G_2 เป็นกราฟอย่างง่าย แล้ว $G_1 \Diamond G_2 = (G_1 \otimes G_2) \cup \left(G_1^C \otimes G_2^C\right)$ เมื่อ G_i^c เป็นกราฟเติมเต็มของ G_i, $i=1,2$

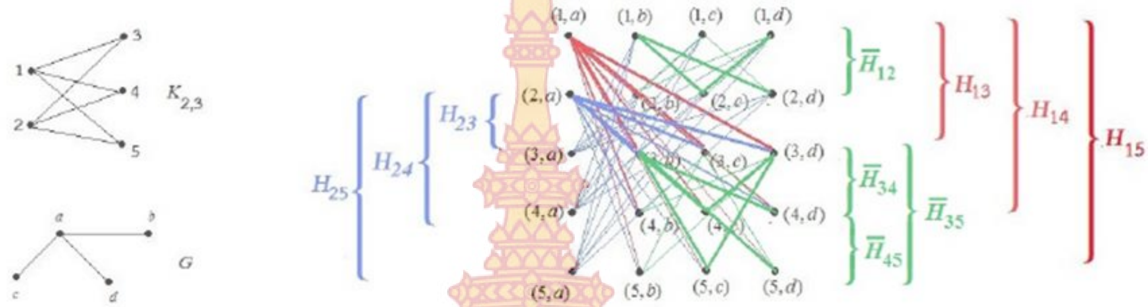
ทฤษฎีบท 3.4 ให้ G เป็นกราฟต่อเนื่องอันดับ p แล้วกราฟของ

$$K_{m,n} \Diamond G \cong \bigcup_{i=1}^{m} H_i \cup \bigcup_{i=1}^{m-1} M_i \cup \bigcup_{i=m+1}^{m+n-1} N_i$$

โดยที่ $H_i = \bigcup_{j=m+1}^{m+n} H_{ij}$, $M_i = \bigcup_{j=i+1}^{m} \overline{H}_{ij}$, $N_i = \bigcup_{j=i+1}^{m+n} \overline{H}_{ij}$ เมื่อ $V(H_{ij}) = V(\overline{H}_{ij}) = S_i \cup S_j$ $S_i = \{(u_i,v_1),(u_i,v_2),\ldots,(u_i,v_p)\}$, $i<j$; $E(H_{ij}) = \{(u_i,v)(u_j,w) \mid vw \in E(G)\}$; $E(\overline{H}_{ij}) = \{(u_i,v)(u_j,w) \mid vw \notin E(G)\}$ และ $E(R_i) = \{(u_i,v)(u_j,w) \mid vw \in E(G)\}$ ยิ่งไปกว่านั้น ถ้า G ไม่มีวัฏจักรคี่ แล้ว แต่ละ H_{ij} และ $\overline{H}_{ij}$ จะประกอบด้วยสองคอมโพแนนท์ต่อเนื่องที่สมสัณฐานกับกราฟ G และ G^C ตามลำดับ

ตัวอย่าง 3.1 กราฟของ $K_{2,3}\Diamond G$ แสดงได้ดังภาพที่ 16

$$K_{2,3}\Diamond\ G \cong \bigcup_{i=1}^{2} H_i \cup M_1 \cup \bigcup_{i=3}^{4} N_i \cong [H_{13}\cup H_{14}\cup H_{15}]\cup[H_{23}\cup H_{24}\cup H_{25}]\cup\overline{H}_{12}\cup[\overline{H}_{34}\cup\overline{H}_{35}]\cup\overline{H}_{45}$$



ภาพที่ 16 กราฟของ $K_{2,3}\Diamond G$

4. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในปี 1968 G. Chartrand, D.P. Geller และ S. Hedetniemi ศึกษา A generalization of the chromatic number. และในปี 1985 J.A. Andrews และ M.S. Jacobson ก็ศึกษา On a generalization of chromatic number. และ On a generalization of chromatic number and two kinds of ramsey numbers.

ในปี 1987 Peter Dankelmann, Dieter Rautenbach, Lutz Volkmann ศึกษา Some parameters of graph and its complement.

ในปี 1989 D. Bergstrand, F. Harary, K. Hodges, G. Jennings, L. Kuklinski และ J. Wiener ร่วมกันศึกษา The sum numbering of a complete graphs. และอีก 3 ปีต่อมา

N. Hartseld และ W. F. Smyth ศึกษาเรื่อง The sum number of complete bipartite graphs, in graphs and matrices (ed. R. Rees).

ในปี 1991 Mustapha Chellali และ Lutz Volkmann ศึกษา Relations between parameters of a graph.

ในปี 1999 Shaoji Xu ศึกษา On independent domination number of regular graphs. และ C. D. Wallace ศึกษา Mod sum numbers of complete bipartite graphs. และ M. Sonntag, H. M. Teichert ศึกษา The sum number of d-partite complete hypergraphs. และอีก 2 ปีถัดมาศึกษา On the sum number and integral sum number of hypertrees and complete hypergraphs. ขณะที่ M. Sutton and M. Miller ศึกษา On the sum number of wheels. และ Y. Wang and B. Liu ศึกษา The sum number and integral sum number of complete bipartite graphs.

ในปี 2003 V. Seanpholphat, G. Chartrand, T. Thomas and P. Zhang ร่วมกันศึกษา On the hamiltonian number of a graph, The independent resolving number of a graph. และอีก 2 ปีต่อมาศึกษา Graphs with prescribed order and hamiltonian number.

ในปี 2004 A. J. W. Hilton, P. D. Johnson Jr. ศึกษา Relations between the lower domination parameters and the chromatic number of a graph. ขณะที่ D. Liu ศึกษา Radio number for trees. และอีก 4 ปีต่อมาศึกษาเรื่อง Radio number for square of cycles.

ตั้งแต่ปี 2002 จนถึงปัจจุบัน N. Punnim ศึกษากราฟพารามิเตอร์อีกมากมายหลายพารามิเตอร์ โดยมีบางงานวิจัยศึกษาร่วมกับนักวิจัยคนอื่นๆด้วย เช่น S. Bau, J. Akiyama, S. Thaithae, V. Seanpholphat, A. Chantasartrassmee เป็นต้น ดังผลงานวิจัยต่อไปนี้ Regular graphs with maximum forest number, The forest number of (n , m)-graphs, Decycling regular graphs, Interpolation theorems in jump graphs, Realizations and interpolation theorems for graph parameters, Almost hamiltonian cubic graphs, Regular graphs and their chromatic numbers, The hamiltonian number of cubic graphs, Almost hamiltonian cubic graphs, Degree sequences and chromatic numbers of graphs, The clique numbers of regular graphs, Regular graphs and their chromatic numbers, Spectrum of graph parameters, Interpolation theorems on graph parameters, The matching number of regular graphs, Decycling regular graphs, The decycling number of cubic graphs. และ The graph of realizations and chromatic numbers. เป็นต้น

สำหรับงานวิจัยที่ศึกษากราฟพารามิเตอร์บนผลคูณคาร์ทีเซียนมีมากมายดังเช่นในช่วงปี 1980-1995 นักวิจัยหลายท่าน เช่น L.W. Beineke, R.D. Ringeisen, K. Asano, A.M. Dean และ R.B. Richter ได้ศึกษา Crossing number บนผลคูณคาร์ทีเซียนของกราฟลักษณะเฉพาะต่างๆ

ในปี 1995 และ 1997 S. Gravier และ A. Khelladi ศึกษา Domination number และ Hamiltonian number ของกราฟ Hamiltonian สองกราฟ

ในปี 1998 และ 1999 J.M. Xu, W.S. Chiue และ B.S. Shieh ศึกษา Connectivity

ในปี 1999 R. Cherifi, S. Gravier, X. Lagraula, C.Payan และ I. Zighem ศึกษา Domination number โดยปี 2005 B. Bresar ได้ขยายผลศึกษา Upper domination

ในปี 2005 S. Klavzar ศึกษา New bounds and exact results on the independence number of cartesian product graphs.

ในปี 2008 S. Spacapan ศึกษา Connectivity of cartesian products of graphs.

และในปี 2006-2010 J.M. Xu และ C. Yang ร่วมกันศึกษา Connectivity และ super-connectivity of cartesian product graphs.

ส่วนสำหรับงานวิจัยที่ศึกษากราฟพารามิเตอร์บนผลคูณเข้ม (Strong product) และผลคูณเล็กซิโคกราฟิก ยังมีไม่มากนัก เช่น ในปี 2006 L. Sun และ J.M. Xu ศึกษา Connectivity บน strong product

ในปี 1998 S. Klavzar ศึกษา Fractional chromatic number บน lexicographic product

และในปี 2005 M. M. M. Jaradat และ M. Y. Alzoubi ร่วมกันศึกษา Upper bound of the basis number บน lexicographic product of graphs.

สำหรับงานวิจัยที่ศึกษากราฟพารามิเตอร์บนผลคูณโครเน็กเกอร์หรือผลคูณเท็นเซอร์หรือผลคูณตรงก็มีค่อนข้างมาก เช่นในปี 1999 A. Klobucar ศึกษา Domination numbers ของผลคูณของ P_6 และ P_n อีก 1 ปีต่อมาร่วมกับ N. Seifter ศึกษา k-dominating sets บนผลคูณของ paths

ในปี 2001 P. K. Jha ศึกษา Smallest independent dominating sets บนผลคูณของ cycles อีก 1 ปีต่อมาศึกษา Perfect r-domination บนผลคูณของ three cycles

ในปี 2005 C. Tardif ศึกษา Fractional chromatic number ขณะที่ D. F. Rall ศึกษา Total domination

ในปี 2006 P. Dorbec, S. Gravier, S. Klavzar และ S. Spacapan ขยายผลศึกษา Some results on total domination

ในปี 2008 A.Mamut และ E.Vumar ร่วมกันศึกษา Vertex vulnerability parameters

ในปี 2009 R. Guji และ E. Vumar ร่วมกันศึกษา Connectivity

และตั้งแต่ปี 2011 T. Sitthiwirattham ร่วมกับนักวิจัยหลายท่านศึกษา Independent number, Vertex covering number, Dominating number, Matching number, Edge Covering number และ Edge dominating number บนกราฟร่วม กราฟผลต่าง และผลคูณโครเน็กเกอร์บน Path, Cycle, Complete Graph, Complete Bipartite และ Wheel

บทที่ 3
ระเบียบวิธีการวิจัย

การศึกษาวิจัยเรื่องจำนวนอิสระและจำนวนจุดปกคลุมบนผลคูณมอดูลาร์ของกราฟอย่างง่าย ผู้วิจัยได้ดำเนินการวิจัยตามลำดับดังนี้

1. ค้นคว้าหาเอกสาร บทความวิจัยที่เกี่ยวข้องกับผลคูณมอดูลาร์ และกราฟพารามิเตอร์ต่างๆ
2. ศึกษาความรู้เกี่ยวกับนิยามและทฤษฎีบทต่างๆเกี่ยวกับผลคูณมอดูลาร์ และกราฟพารามิเตอร์ต่างๆจากเอกสาร ตำรา และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
3. ค้นคว้าหาเอกสาร ตำรา วารสาร และเอกสารสิ่งพิมพ์ที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยที่กำลังดำเนินการวิจัยอยู่จากแหล่งข้อมูลต่างๆ
4. โดยการอาศัยความรู้พื้นฐานที่ได้จากการศึกษาตามระเบียบวิธีตามข้อ 2– 3 หาแนวทางในการคิดค้นทฤษฎีใหม่ๆ ในการหาค่ากราฟพารามิเตอร์เชิงจุดสามตัว คือ จำนวนอิสระ จำนวนจุดปกคลุม และจุดครอบงำ บนผลคูณมอดูลาร์ของกราฟอย่างง่ายและกราฟสองส่วนบริบูรณ์
5. สร้างและพิสูจน์ทฤษฎีบทในการหาค่ากราฟพารามิเตอร์เชิงจุดสามตัว คือ จำนวนอิสระ จำนวนจุดปกคลุม และจุดครอบงำ บนผลคูณมอดูลาร์ของกราฟอย่างง่ายและกราฟสองส่วนบริบูรณ์
6. สรุปผล เตรียมเอกสารสำหรับการตีพิมพ์ ส่งตีพิมพ์ และเขียนรายงานการวิจัย

บทที่ 4
ผลการวิจัย

การวิจัยจำนวนอิสระและจำนวนจุดปกคลุมบนผลคูณมอดูลาร์ของกราฟอย่างง่าย **ผู้วิจัยได้**ผลการวิจัย ตามลำดับดังนี้

1. จำนวนอิสระบนผลคูณเมอดูลาร์ของกราฟอย่างง่ายกับกราฟสองส่วนบริบูรณ์
2. จำนวนจุดปกคลุมบนผลคูณมอดูลาร์ของกราฟอย่างง่ายกับกราฟสองส่วนบริบูรณ์
3. จำนวนจุดครอบงำบนผลคูณมอดูลาร์ของกราฟอย่างง่ายกับกราฟสองส่วนบริบูรณ์

1. จำนวนอิสระบนผลคูณเมอดูลาร์ของกราฟอย่างง่ายกับกราฟสองส่วนบริบูรณ์

ทฤษฎีบท 1.1 (อ้างอิงจาก D.B.West.) ให้ G เป็นกราฟต่อเนื่อง และ $I(G)=\{v_1,v_2,\ldots,v_k\}$ ถ้า

1. จุด v_i ไม่ประชิดกับจุด v_j สำหรับทุก $i\neq j$ และ $i,j=1,2,\ldots,k$
2. $V(G)-I(G)=\bigcup_{i=1}^{k}N(v_i)$ เมื่อ $N(v_i)$ เป็นย่านเปิด (open neighborhood) ของจุด v_i

แล้วจะได้ว่า I(G) เป็นเซตอิสระใหญ่สุดของ G

บทตั้ง 1.1 ให้ $H_i=\bigcup_{j=m+1}^{m+n}H_{ij}$, $M_i=\bigcup_{j=i+1}^{m}\overline{H}_{ij}$, $N_i=\bigcup_{j=i+1}^{m+n}\overline{H}_{ij}$ แล้ว $\alpha(H_{ij})=2\alpha(G)$ และ $\alpha\left(\overline{H}_{ij}\right)=2\alpha\left(G^C\right)$

พิสูจน์ สมมุติให้ G ไม่มี odd cycle จะได้ว่า H_{ij} และ $\overline{H}_{ij}$ จะมี 2 คอมโพแนนท์ที่ isomorphic กับ G และ G^C

ถ้า G มี odd cycle จะได้ว่าสำหรับจุด $(u_i,v)\in S_i$ และ $(u_j,v)\in S_j$, $i<j$ จะมี $d_{H_{ij}}((u_i,v))=d_{H_{ij}}((u_j,v))=d_G(v)$ และ $d_{\overline{H}_{ij}}((u_i,v))=d_{\overline{H}_{ij}}((u_j,v))=d_{G^C}(v)$

ในการพิสูจน์เราจะแสดงเฉพาะกรณี H_{ij} สำหรับกรณี $\overline{H}_{ij}$ เราจะพิสูจน์ทำนองเดียวกัน

จากนิยามของ Kronecker product และ H_{ij} สำหรับทุกจุด $v,x\in G$ จะได้ว่าจุด $(u_i,v),(u_i,x)$ ไม่มีเส้นเชื่อมกัน และสำหรับจุด $(u_i,v),(u_i,x)\in H_{ij}$ จะมีเส้นเชื่อมกัน ก็ต่อเมื่อ $v,w\in G$ มีเส้นเชื่อมกัน

ต่อไปเราจะแสดงว่า $\alpha(H_{ij})=2\alpha(G)$

(1) เราจะแสดงว่า ถ้าจุด v,w เป็นอิสระกันใน G แล้วจุด $(u_i,v),(u_i,w),(u_j,v)$ และ (u_j,w) จะต้องอิสระกันใน H_{ij}

จากที่กำหนดข้างต้น สำหรับทุกจุด $v,w \in G$ จะไม่มีเส้นเชื่อมระหว่างคู่จุด $(u_i,v),(u_i,w)$ และคู่จุด $(u_j,v),(u_j,w)$

ดังนั้นถ้าจุด v,w เป็นอิสระกันใน G แล้วจะมีทางเดียวที่คู่จุด $(u_i,v),(u_j,w)$ และคู่จุด $(u_j,v),(u_i,w)$ จะอิสระกันใน H_{ij} คือ จะต้องมีเส้น $vw \in E(G)$ ดังนั้นเราได้ผลที่ต้องการ

(2) ต่อไปเราจะแสดงว่า ถ้าจุด $v \notin I(G)$ แล้ว $(u_i,v) \notin I(H_{ij})$ และ $(u_j,v) \notin I(H_{ij})$ เพราะว่า ถ้า $v \notin I(G)$ แล้วจะมี $w \in I(G)$ ที่ซึ่ง $vw \in E(G)$ ดังนั้นจะมีเส้น $(u_i,v),(u_j,w)$ และ $(u_j,v),(u_i,w)$ ใน H_{ij}

จาก $(u_j,w) \in I(H_{ij})$ และ (1) ทำให้ $(u_i,v) \notin I(H_{ij})$ และจาก $(u_i,w) \in I(H_{ij})$ และ (1) ทำให้ $(u_j,v) \notin I(H_{ij})$ จะได้ว่า เซตอิสระใน G จะสมนัยกับสองเซตอิสระใน H_{ij}

ดังนั้น $\alpha(H_{ij}) = 2\alpha(G)$ และ $\alpha\left(\overline{H_{ij}}\right) = 2\alpha\left(G^C\right)$

ทฤษฎีบท 1.2 ให้ G เป็นกราฟต่อเนื่องอันดับ p และไม่มี cut-vertex แล้ว $\alpha(K_{m,n} \Diamond G) = \max\{ 2\alpha(G),(m+n)[\alpha(G)+\alpha(G^C)-p],[p-\alpha(G^C)]\max\{m,n\} \}$

พิสูจน์ ให้ $V(K_{m,n}) = \{u_i \mid i=1,2,\ldots,m+n\}$, $V(G) = \{v_i \mid i=1,2,\ldots,p\}$ และ

$S_i = \left\{(u_i,v_j) \in V(K_{m,n} \Diamond G) \middle| j=1,2,\ldots,p\}, i=1,2,\ldots,m+n\right\}$

สมมุติให้เซตอิสระใหญ่สุดของ $K_{m,n}$ และ G คือ

$$I_1 = \begin{cases} \{u_1,u_2,\ldots,u_m\} & ; m>n \\ \{u_{m+1},u_{m+2},\ldots,u_{m+n}\} & ; m<n \end{cases} \quad \text{และ } I_2 \text{ ตามลำดับ}$$

. พิจารณา H_1 จากบทตั้ง 1.1 จะได้ $\alpha(H_{1j}) = 2\alpha(G)$, $j=m+1,m+2,\ldots,m+n$ จากทุก H_{1j},H_{1k} ; $j \neq k$ จะมี $\alpha(G)$ จุดร่วมกันในเซตอิสระของมัน ซึ่งจะอยู่ใน S_1

ดังนั้น เซตอิสระของ H_1 จะอยู่ใน $S_1 \cup \bigcup_{j=m+1}^{m+n} S_j$

ในทำนองเดียวกัน เซตอิสระของ $H_2,H_3,\ldots,H_m$ จะมี $\alpha(G)$ จุดร่วมกันในเซตอิสระของมัน ซึ่งจะอยู่ใน $S_2,S_3,\ldots,S_m$ ตามลำดับ

ดังนั้นเซตอิสระของ $K_{m,n} \otimes G$ คือเซต $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m+n} S_i$

นอกจากนี้ เราได้เซตอิสระอื่นของ $K_{m,n} \otimes G$ คือเซต $\ddot{A} \subseteq \bigcup_{i=m+1}^{m+n} S_i$ เมื่อ $m<n$

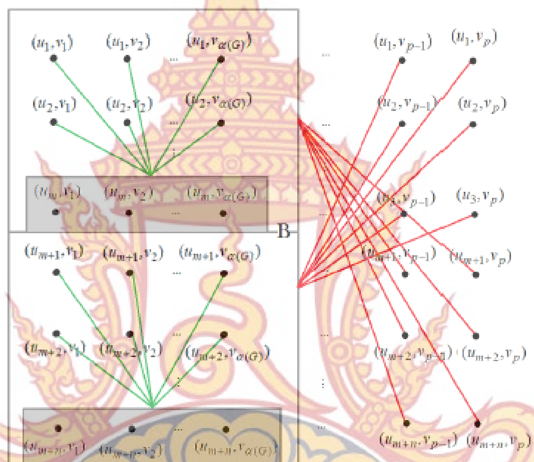
พิจารณาแต่ละ $\overline{H_{ij}}$

จาก $K_{m,n}\Diamond G=\left(K_{m,n}\otimes G\right)\cup\left(K^{c}_{m,n}\otimes G^{c}\right)$ จะมี $E\left(K_{m,n}\Diamond G\right)$ คือ เซตของ $E\left(K_{m,n}\otimes G\right)$ รวมกับทุกเส้นของ $\overline{H}_{ij}$ และจะเห็นว่าแต่ละเส้นใน G^{C} จะมีจุดปลายใน I_2

ดังนั้น จะมีเส้นซึ่งตกกระทบกับจุดใน $A\cap\left(S_i\cup S_j\right)$

ให้ B เป็นเซตของทุกจุดใน $\bigcup_{i=1}^{m-1}S_i\cup\bigcup_{i=m+1}^{m+n-1}S_i=\left(S_m\cup S_{m+n}\right)^{c}$ จะได้ว่า A-B เป็นเซตอิสระของ $K_{m,n}\Diamond G$

ดังนั้น $\alpha\left(K_{m,n}\Diamond G\right)\geq 2\alpha(G)$

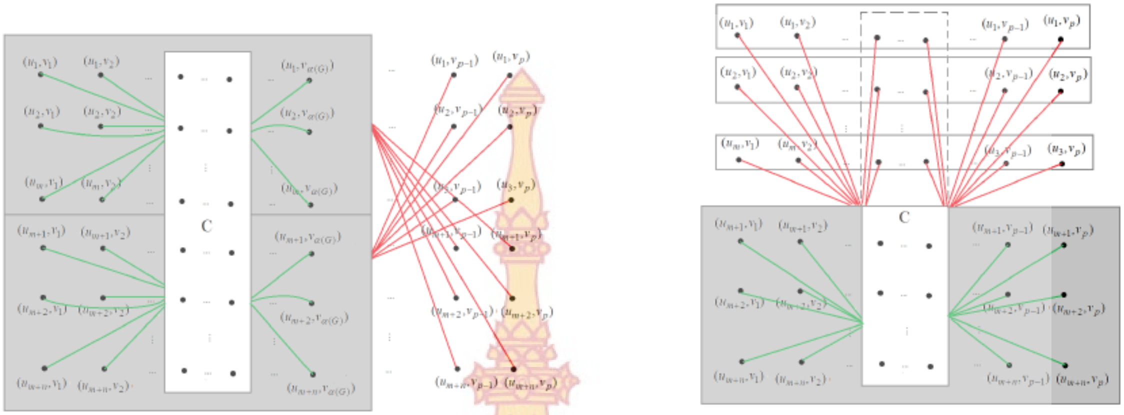


ภาพที่ 17 เซตอิสระ A-B

ในอีกทางหนึ่ง เราสามารถหาเซตอิสระอื่นของ $K_{m,n}\Diamond G$ ได้ดังนี้

ให้ $C=\bigcup_{i=1}^{m+n}C_i$ เมื่อ $C_i=\{(u_i,v)/v\notin I(G^{c})\}$ จะได้ว่า A-C และ $\ddot{A}$-C เป็นเซตอิสระของ $K_{m,n}\Diamond G$

ดังนั้น $\alpha(K_{m,n}\Diamond G)\geq\max\{(m+n)[\alpha(G)+\alpha(G^{C})-p],[p-\alpha(G^{C})]\max\{m,n\}\}$



ภาพที่ 18 เซตอิสระ A-C และ $\ddot{A}$-C เมื่อ $m<n$

นั่นคือ $\alpha(K_{m,n}\lozenge G) \geq \max\{ 2\alpha(G),(m+n)[\alpha(G)+\alpha(G^C)-p],[p-\alpha(G^C)]\max\{m,n\} \}$

สมมุติให้ $\alpha(K_{m,n}\lozenge G) > \max\{ 2\alpha(G),(m+n)[\alpha(G)+\alpha(G^C)-p],[p-\alpha(G^C)]\max\{m,n\} \}$
จะได้ว่า มีจุดใน $V\left(K_{m,n}\lozenge G\right)$-(A-B) ไม่ประชิดกับจุดใน A-B ซึ่งเป็นไปไม่ได้เพราะ

$V\left(K_{m,n}\lozenge G\right)-(A-B) = \bigcup_{(u,v)\in A-B} N(u,v)$ และด้วยเหตุผลเดียวกัน จะได้ว่า

$V\left(K_{m,n}\lozenge G\right)-(A-C) = \bigcup_{(u,v)\in A-C} N(u,v)$ และ $V\left(K_{m,n}\lozenge G\right)-(\ddot{A}-C) = \bigcup_{(u,v)\in \ddot{A}-C} N(u,v)$

จากทฤษฎีบท 1.1 ทำให้ได้ว่า

$\alpha(K_{m,n}\lozenge G) = \max\{ 2\alpha(G),(m+n)[\alpha(G)+\alpha(G^C)-p],[p-\alpha(G^C)]\max\{m,n\} \}$

2. จำนวนจุดปกคลุมบนผลคูณมอดูลาร์ของกราฟอย่างง่ายและกราฟสองส่วนบริบูรณ์

ทฤษฎีบท 2.1 ให้ G เป็นกราฟอย่างง่ายอันดับ n แล้ว $\alpha(G)+\beta(G)=n$ (อ้างอิงจาก D.B. West.)

ทฤษฎีบท 2.2 ให้ G เป็นกราฟต่อเนื่องอันดับ p และไม่มี cut-vertex แล้ว
$\beta(K_{m,n}\lozenge G)=\min\{ (m+n-2)p+\beta(G),(m+n)[\beta(G)+\beta(G^c)-p], (m+n)p-\beta(G^c)\max\{m,n\}\}$

พิสูจน์ $\beta(K_{m,n}\lozenge G)=(m+n)p-\max\{2\alpha(G),(m+n)[\alpha(G)+\alpha(G^c)-p],[p-\alpha(G^c)]\max\{m,n\}\}$

$=(m+n)p+\max\{-2\alpha(G),-(m+n)[\alpha(G^c)-\beta(G)],[\alpha(G^c)-p]\max\{m,n\}\}$

$=\min\{ (m+n)p-2\alpha(G),(m+n)[\beta(G)+\beta(G^c)-p],(m+n)p-\beta(G^c)\max\{m,n\}\}$

$=\min\{ (m+n-2)p+\beta(G),(m+n)[\beta(G)+\beta(G^c)-p],(m+n)p-\beta(G^c)\max\{m,n\}\}$

3. จำนวนจุดครอบงำบนผลคูณมอดูลาร์ของกราฟอย่างง่ายและกราฟสองส่วนบริบูรณ์

ทฤษฎีบท 3.1 (อ้างอิงจาก O. Ore.) เซตครอบงำ D เป็นเซตครอบงำเล็กสุด ก็ต่อเมื่อ **สำหรับ**แต่ละจุด $u \in D$ จะสอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. $N(u) \subseteq V\text{-}D$
2. จะมีจุด $v \in V\text{-}D$ ที่ซึ่ง $N(v) \cap D = \{u\}$

บทตั้ง 3.1 ให้ $H_i = \bigcup_{j=m+1}^{m+n} H_{ij}$, $M_i = \bigcup_{j=i+1}^{m} \overline{H}_{ij}$, $N_i = \bigcup_{j=i+1}^{m+n} \overline{H}_{ij}$ แล้ว $\gamma(H_{ij}) = 2\gamma(G)$ และ $\gamma(\overline{H}_{ij}) = 2\gamma(G^c)$

พิสูจน์ สมมุติให้ G ไม่มี odd cycle จะได้ว่า H_{ij} และ $\overline{H}_{ij}$ จะมี 2 คอมโพแนนท์ที่ isomorphic กับ G และ G^C

ถ้า G มี odd cycle จะได้ว่าสำหรับจุด $(u_i,v) \in S_i$ และ $(u_j,v) \in S_j$, $i<j$ จะมี $d_{H_{ij}}((u_i,v)) = d_{H_{ij}}((u_j,v)) = d_G(v)$ และ $d_{\overline{H}_{ij}}((u_i,v)) = d_{\overline{H}_{ij}}((u_j,v)) = d_{G^c}(v)$

ในการพิสูจน์เราจะแสดงเฉพาะกรณี H_{ij} สำหรับกรณี $\overline{H}_{ij}$ เราจะพิสูจน์ทำนองเดียวกัน

จากนิยามของ Kronecker product และ H_{ij} สำหรับทุกจุด $v,x \in G$ จะได้ว่าจุด $(u_i,v),(u_i,x)$ ไม่มีเส้นเชื่อมกัน และสำหรับจุด $(u_i,v),(u_j,x) \in H_{ij}$ จะมีเส้นเชื่อมกัน ก็ต่อเมื่อ $v,w \in G$ มีเส้นเชื่อมกัน

ต่อไปเราจะแสดงว่า $\gamma(H_{ij}) = 2\gamma(G)$

(1) เราจะแสดงว่า ถ้าจุด v,w อยู่ในเซตครอบงำใน G แล้วจุด $(u_i,v),(u_i,w),(u_j,v)$ และ (u_j,w) จะต้องอยู่ในเซตครอบงำใน H_{ij}

จากที่กำหนดข้างต้น สำหรับทุกจุด $v,w \in G$ จะไม่มีเส้นเชื่อมระหว่างคู่จุด $(u_i,v),(u_i,w)$ และคู่จุด $(u_j,v),(u_j,w)$

ดังนั้นถ้าจุด v,w อยู่ในเซตครอบงำใน G แล้วจะมีทางเดียวที่คู่จุด $(u_i,v),(u_j,w)$ หรือคู่จุด $(u_j,v),(u_i,w)$ ไม่อยู่ในเซตครอบงำใน H_{ij} คือจะต้องมีเส้น $vw \in E(G)$ แต่ $vw \notin E(G)$ เพราะจุด v,w อยู่ในเซตครอบงำใน G ดังนั้นเราได้ผลที่ต้องการ

(2) ต่อไปเราจะแสดงว่า ถ้าจุด $v \notin D(G)$ แล้ว $(u_i,v) \notin D(H_{ij})$ และ $(u_j,v) \notin D(H_{ij})$ เพราะว่าถ้า $v \notin D(G)$ แล้วจะมี $w \in D(G)$ ที่ซึ่ง $vw \in E(G)$

ดังนั้นจะมีเส้น $(u_i,v),(u_j,w)$ และ $(u_j,v),(u_i,w)$ ใน H_{ij}

จาก $(u_j,w) \in D(H_{ij})$ และ (1) ทำให้ $(u_i,v) \notin D(H_{ij})$ และจาก $(u_i,w) \in D(H_{ij})$ และ (1) ทำให้ $(u_j,v) \notin D(H_{ij})$ จะได้ว่า เซตครอบงำใน G จะสมนัยกับสองเซตครอบงำใน H_{ij}

ดังนั้น $\gamma(H_{ij}) = 2\gamma(G)$ และ $\gamma(\overline{H}_{ij}) = 2\gamma(G^C)$

ทฤษฎีบท 3.2 ให้ G เป็นกราฟอย่างง่ายอันดับ p แล้ว $\gamma(K_{m,n}\Diamond G)=\min\{(m+n)\gamma(G), (m+n)\gamma(G^c),2p\}$

พิสูจน์ ให้ $V(K_{m,n})=\{u_i / i=1,2,...,m+n\}$, $V(G)=\{v_i / i=1,2,...,p\}$, และ $S_i=\{(u_i,v_j)\in V(K_{m,n}\Diamond G)/ \ j=1,2,...,p\}$, $i=1,2,...,m+n$

สมมุติให้เซตครอบงำเล็กสุดของ $K_{m,n}$ และ G คือ $D_1=\{u_1,u_{m+1}\}$ และ D_2 ตามลำดับ

. พิจารณา H_1 จากบทตั้ง 3.1 จะได้ $\gamma(H_{1j})=2\gamma(G)$, $j=m+1,m+2,...,m+n$ จากทุก H_{1j} **จะมี** $\gamma(G)$ จุดร่วมกันในเซตครอบงำของมัน ซึ่งจะอยู่ใน S_1

ดังนั้น เซตครอบงำของ H_1 จะอยู่ใน $S_1\cup\bigcup_{j=m+1}^{m+n}S_j$

ในทำนองเดียวกัน เซตครอบงำของ $H_2,H_3,...,H_m$ จะมี $\alpha(G)$ จุดร่วมกันในเซตครอบงำ**ของมัน** ซึ่งจะอยู่ใน $S_2,S_3,...,S_m$ ตามลำดับ

ดังนั้นเซตครอบงำของ $K_{m,n}\otimes G$ คือ เซต $D\subseteq\bigcup_{i=1}^{m+n}S_i$ เมื่อ $D_i=\{(u_i,v)/ v\in D_2\}$

นอกจากนี้ เราได้เซตเซตครอบงำอื่นของ $K_{m,n}\otimes G$ คือเซต $\ddot{D}\subseteq\bigcup_{i=m+1}^{m+n}\ddot{D}_i$ เมื่อ $\ddot{D}_i=\{(u_i,v)/ v$ อยู่ในเซตครอบงำของ $G^c\}$

พิจารณาแต่ละ $\overline{H}_{ij}$

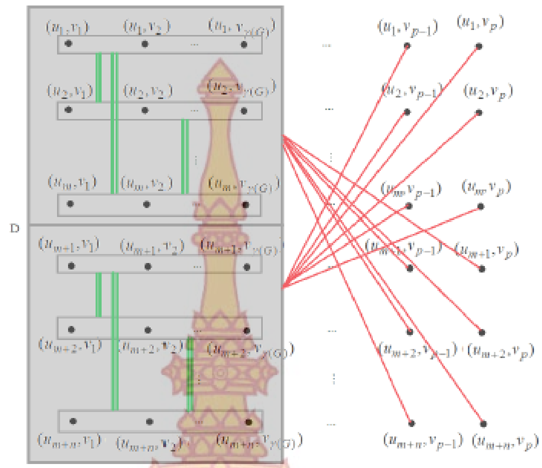
จาก $K_{m,n}\Diamond G=(K_{m,n}\otimes G)\cup(K^c_{m,n}\otimes G^c)$ จะมี $E(K_{m,n}\Diamond G)$ คือ เซตของ $E(K_{m,n}\otimes G)$ **รวมกับ** ทุกเส้นของ $\overline{H}_{ij}$ และจะเห็นได้ชัดว่าจุดใน $V(\overline{H}_{ij})$ จะประชิดกับจุดใน D เพราะทุกจุดใน $V(K_{m,n}\otimes G)$ จะประชิดกับจุดใน D โดยเหตุผลเดียวกันจะได้ว่าทุกจุดใน $V(\overline{H}_{ij})$ จะประชิดกับจุดใน $\ddot{D}$

จะได้ว่า D และ $\ddot{D}$ เป็นเซตครอบงำของ $K_{m,n}\Diamond G$

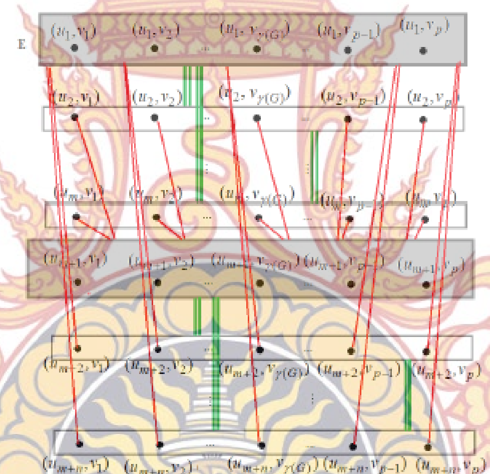
ในอีกทางหนึ่ง เราสามารถหาเซตครอบงำอื่นของ $K_{m,n}\Diamond G$ ได้ดังนี้

ให้ $E=S_1\cup S_{m+1}$ จะได้ว่า E เป็นเซตครอบงำของ $K_{m,n}\Diamond G$

ดังนั้น $\gamma(K_{m,n}\Diamond G)\leq\min\{(m+n)\gamma(G),(m+n)\gamma(G^c),2p\}$



ภาพที่ 19 เซตครอบงำ D หรือ $\ddot{D}$



ภาพที่ 20 เซตครอบงำ E

สมมุติให้ $\gamma(K_{m,n}\Diamond G)<\min\{(m+n)\gamma(G),(m+n)\gamma(G^c),2p\}$ จะได้ว่ามีจุดใน $V(K_{m,n}\Diamond G)-D$ ไม่ประชิดกับจุดใน D ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะ $V(K_{m,n}\Diamond G)-D$ จะประชิดกับจุด ใน D และด้วยเหตุผลเดียวกัน สำหรับกรณีเซตครอบงำ $\ddot{D}$ และ E

ดังนั้น $\gamma(K_{m,n}\Diamond G)=\min\{(m+n)\gamma(G),(m+n)\gamma(G^c),2p\}$

บทที่ 5
สรุปผลและข้อเสนอแนะ

1. สรุปผล

จากงานวิจัยนี้ เราได้ค่าของจำนวนอิสระ จำนวนจุดปกคลุม และจำนวนจุดครอบงำบนผลคูณมอดูลาร์ของกราฟอย่างง่ายและกราฟสองส่วนบริบูรณ์ ดังต่อไปนี้

1. สำหรับ G เป็นกราฟต่อเนื่องอันดับ p และไม่มี cut-vertex แล้ว จำนวนอิสระบนผลคูณมอดูลาร์ของกราฟอย่างง่ายและกราฟสองส่วนบริบูรณ์ คือ

$$\alpha(K_{m,n}\Diamond G) = \max\{ 2\alpha(G),(m+n)[\alpha(G)+\alpha(G^{C})-p],[p-\alpha(G^{C})]\max\{m,n\} \}$$

2. สำหรับ G เป็นกราฟต่อเนื่องอันดับ p และไม่มี cut-vertex แล้ว จำนวนจุดปกคลุมบนผลคูณมอดูลาร์ของกราฟอย่างง่ายและกราฟสองส่วนบริบูรณ์ คือ

$$\beta(K_{m,n}\Diamond G)=\min\{ (m+n-2)p+\beta(G),(m+n)[\beta(G)+\beta(G^{c})-p], (m+n)p-\beta(G^{c})\max\{m,n\}\}$$

3. สำหรับ G เป็นกราฟอย่างง่ายอันดับ p แล้ว จำนวนจุดครอบงำบนผลคูณมอดูลาร์ของกราฟอย่างง่ายและกราฟสองส่วนบริบูรณ์ คือ

$$\gamma(K_{m,n}\Diamond G)=\min\{(m+n)\gamma(G),(m+n)\gamma(G^{c}),2p\}$$

2. ข้อเสนอแนะ

จากการทำการวิจัยเรื่องกราฟพารามิเตอร์เชิงจุดบนผลคูณมอดูลาร์ของกราฟอย่างง่ายและกราฟสองส่วนบริบูรณ์ ได้ข้อคิดเห็นและข้อเสนอแนะดังนี้

1. งานวิจัยนี้สามารถนำไปใช้เป็นแนวทางในการหาค่ากราฟพารามิเตอร์เชิงจุดอื่นๆ
2. ในงานวิจัยนี้สามารถนำไปใช้เป็นแนวทางแก้ปัญหากับกราฟลักษณะเฉพาะอื่นๆได้
3. เมื่อได้ศึกษาทฤษฎีบทต่างๆในงานวิจัยนี้แล้วอาจจะศึกษาต่อไปในการประยุกต์อื่นๆต่อไป

บรรณานุกรม

A.M. Dean and R.B. Richter. "The Crossing Number of $C_4 \times P_4$." **J. Graph Theory.** 19 (1995) : 125–129.

A. Bottreou and Y. Metivier. "Some Remarks on the Kronecker Product of Graphs." **Inform. Process. Lett.** 68 (1998) : 55-61.

A. Klobucar. "Domination Numbers of Cardinal Products." **Math. Slovaca**. 49 (1999) : 387–402.

A. Klobucar. "Domination Numbers of Cardinal Products $P_6 \times P_n$." **Math. Commun.** 4 (1999) : 241–250.

A. Klobucar and N. Seifter. "K-Dominating Sets of Cardinal Products of Paths." **Ars Combin.** 55 (2000) : 33–41.

A. Mamut and E. Vumar. "Vertex Vulnerability Parameters of Kronecker Product of Complete Graphs." **Inform Process. Lett.** 106 (2008) : 258-262.

A. Vesel, and J. Zerovnik "The independence number of the strong product of odd cycles." **Discrete Math.** 182 (1998): 333-336.

B. Bresar and B. Zmazek. "On the Independence Graph of a Graph." **Discrete Math.** 272 (2003) : 263-268.

B.H. Barnes, and K.E. Mackey "A generalized measure of independence and the strong product of graphs." **Networks.** 8 (1978): 135-151.

C. Tardif. "The Fractional Chromatic Number of the Categorical Product of Graphs." **Combinatorica.** 25(5) (2005) : 625-632.

D.B.West. **Introduction to Graph Theory**. Prentice-Hall, 2001.

D. F. Rall. "Total Domination in Categorical Products of Graphs." **Discuss. Math. Graph Theory.** 25 (2005) : 35–44.

D. Bergstrand, F. Harary, K. Hodges, G. Jennings, L. Kuklinski, and J. Wiener. "The Sum Numbering of a Complete Graph." **Bull. Malaysian Math. Soc.** 12 (1989): 25-28.

G. Chartrand and P. Zhang. **Chromatic Graph Theory.** Chapman & Hall/CRC. 483, 2009.

G. Chartrand, D. P. Geller and S. Hedetniemi. "A Generalization of the Chromatic Number." **Proc. Cmnb.Phil. SOC.** 64, (1968) : 265-271.

G. Jonathan L. and J. Yellen. **Graph Theory and Its Applications.** CRC Press, 1999.

H. M. Teichert. "The Sum Number of D-Partite Complete Hypergraphs." **Discuss. Math. Graph Theory.** 19 (1999) : 79-91.

J.-M. Xu and C. Yang. "Connectivity of Cartesian Product Graphs." **Discrete Math.** 306(1) (2006) : 159-165.

J.-M Xu and C.Yang. "Connectivity and Super-Connectivity of Cartesian Product Graphs." **Ars Comb.** 95 (2010) : 235-245.

K. Asano. "The Crossing Number of $K_{1,3,n} \times K_{2,3,n}$." **J. Graph Theory**. 10 (1986) : 1–8.

L. W. Beineke and R. D. Ringeisen. "On the Crossing Number of Product of Cycles and Graphs of Order Four." **J. Graph Theory**. 4 (1980) : 145–155.

L. Sun and J. M. Xu. "Connectivity of Strong Product Graphs." J. Univ. Sci. Tech. China, 36 (3) (2006) : 241-243.

M. Sutton and M. Miller. "On the Sum Number of Wheels." **Discrete Math.** 232 (2001) : 185-188.

M. Chellali and L. Volkmann. "Relations Between Parameters of a graph." **Discrete Mathematics**. 89(1) (1991) : 65-88.

M. M. M. Jaradat and M. Y. Alzoubi. "An Upper Bound of the Basis Number of the Lexicographic Product of Graphs." **Australas. J. Combin**. 32 (2005) : 305–312.

N. Punnim. "Decycling Regular Graphs." **Austral. J. Combin.** 32, (2005) : 147–162.

N. Punnim, V. Seanpholphat and S. Thaithae. "Almost Hamiltonian Cubic Graphs." **International Journal of Computer Science and Network Security.** 7(1) (2007) : 83-86.

N. Punnim and S. Thaithae. "The Hamiltonian Number of Cubic Graphs." **Lecture Notes in Computer Science.** 4535 (2008): 213-223.

N. Punnim. "Degree Sequences and Chromatic Numbers of Graphs." **Graphs Combin.** 18 (3) (2002) : 597–603.

N. Punnim. "The Clique Numbers of Regular Graphs." **Graphs Combin.** 18 (4) (2002) : 781–785.

N. Punnim. “Regular Graphs and Their Chromatic Numbers,” **Thai J. Math.** 1 (2) (2003) : 17–24.

N. Punnim. “The Matching Number of Regular Graphs.” **Thai J. Math.** 2 (2004) : 133–140.

N. Punnim. “The Decycling Number of Cubic Graphs.” **Lecture Note in Computer Science**. 3330 (2005) : 141–145.

N. Hartseld and W. F. Smyth. “The Sum Number of Complete Bipartite Graphs, in Graphs and Matrices (ed. R. Rees).” **Marcel Dekker**. (1992) : 205-211.

O. Ore. **Theory of graphs.** Amer.Math, Soc.Collog.Publ, 38 : Providence, 1962.

P. Dankelmann, D. Rautenbach, and L. Volkmann. “Some Parameters of Graph and Its Complement.” **Discrete Mathematics**. 65(2) (1987) : 197-207.

P. Dorbec, S. Gravier, S. Klavzar and S. Spacapan. “Some Results on Total Domination in Direct Products of Graphs.” **Discuss. Math. Graph Theory**. 26 (2006) : 103–112.

P. K. Jha. “Smallest Independent Dominating Sets in Kronecker Products of Cycles.” **Discrete Appl. Math.** 113 (2001) : 303–306.

P. K. Jha and G. Slutzki. “Independence Numbers of Product Graphs.” **Appl. Math. Lett.** 7(4) (1994) : 91-94.

P. K. Jha. “Perfect R-Domination in the Kronecker Product of Three Cycles.” **IEEE Trans. Circuits Systems I Fund. Theory Appl.** 49 (2002) : 89-92.

P.M. Weichsel “The Kronecker product of graphs.” **Proc. Amer. Math,** 8 (1962): 47-52.

R. Cherifi, S. Gravier, X. Lagraula, C. Payan and I. Zighem. “Domination Number of the Cross Product of Paths.” **Discrete Appl. Math.** 94 (1999) : 101–139.

R. Guji and E. Vumar. “A Note on the Connectivity of Kronecker Products of Graphs.” **Appl. Math. Lett.** 22 (2009) : 1360-1363.

R. Nowakowski and D. F. Rall. “Associative Graph Products and Their Independence, Domination and Coloring Numbers.” **Discuss Math. Graph Theory**. 16 (1996) : 53–79.

S. Klavzar. “Some New Bounds and Exact Results on the Independence Number of Cartesian Product Graphs,” **Ars Combin.** 74 (2005) : 173-186.

S. Gravier. "Hamiltonicity of the Cross Product of Two Hamiltonian Graphs." **Discrete Math**. 170, (1997) : 253-257.

S. Gravier and A. Khelladi. "On the Domination Number of Cross Products of Graphs." **Discrete Math.** 145 (1995) : 273-277.

S. Klavzar, "On the Fractional Chromatic Number and the Lexicographic Product of Graphs." **Discrete Math.** 185 (1998) : 259-263.

S. Spacapan. "Connectivity of Cartesian Products of Graphs." **Appl. Math. Lett.** 21 (2008) : 682-685.

S. Xu. "On Independent Domination Number of Regular Graphs." **Discrete Mathematics**. 202 (3) (199) : 135-144.

T. Sitthiwirattham. "Domination on Kronecker Product of P_n ." **Applied Mathematical Sciences.** 6 (85-88) (2012) : 4345-4352.

T. Sitthiwirattham. "Domination on Kronecker Product of C_n ." **Applied Mathematical Sciences.** 6 (85-88) (2012) : 4353-4360.

T. Sitthiwirattham. "Vertex Covering and Independent Number on Difference Graph." **International Journal of Pure and Applied Mathematics.** 77(4) (2012) : 543-547.

T. Sitthiwirattham. "Independent and Vertex Covering Number on Kronecker Product of K_n ." **International Journal of Pure and Applied Mathematics.** 77(1) (2012) : 91 – 97.

T. Boonpreaw and T. Sitthiwirattham. "Independent and Vertex Covering Number on Kronecker Product of W_n ." **International Journal of Pure and Applied Mathematics.** 77 (1) (2012) : 99 – 105.

T. Sitthiwirattham and S. Chesrichai. "Independent and Vertex Covering Number on Kronecker Product of $K_{m,n}$." **Applied Mathematical Sciences.** 6(28) (2012) : 1403 – 1408.

T. Sitthiwirattham. "Edge Covering and Matching Number on Kronecker Product of K_n ." **Applied Mathematical Sciences.** Vol. 6 (2012), No.28, 1397–1402.

T. Sitthiwirattham. "Matching, Edge Covering and Edge Dominating Number of Joined Graph." **Far East Journal of Mathematical Science.** 53(2) (2011) : 217-224.

T. Sitthiwirattham and J. Soontharanon. "Independent and Vertex Covering Number on Kronecker Product of C_n." **International Journal of Pure and Applied Mathematics.** 71(1) (2011) : 149-157.

T. Sitthiwirattham. "Independent and Vertex Covering Number on Kronecker Product of P_n." **International Journal of Pure and Applied Mathematics.** 73(2) (2011) : 227-234.

T. Sitthiwirattham. "Matching and Edge Covering Number on Kronecker Product of C_n." **International Journal of Pure and Applied Mathematics.** 72(3) (2011) : 375-383.

T. Sitthiwirattha. "Matching and Edge Covering Number on Kronecker Product of P_n." **Far East Journal of Mathematical Science.** 59(2) (2011) : 127-137.

T. Sitthiwirattham and S. Chesrichai. "Independent, Vertex Covering and Dominating Number of Joined Graph." **Far East Journal of Mathematical Science.** 53(2) (2011) : 65-72.

T. Sitthiwirattham and C. Promsakon. "Planarity of Joined Graph." **Journal of Discrete Mathematical Sciences & Cryptography**. 12(1) (2009) : 63-69.

V. Seanpholphat, G. Chartrand, T. Thomas, and P. Zhang . "On the Hamiltonian Number of a Graph." **Congr. Numer.** 165 (2003) : 160-165.

V. Seanpholphat, G. Chartrand and P. Zhang. "The Independent Resolving Number of a Graph." **Math. Bohem.** 4(128) (2003) : 379-393.

V. Seanpholphat and P. Zhang. "Graphs with Prescribed Order and Hamiltonian Number." **Congr. Numer.** 175 (2005) : 161-173.

W. Imrich. "Factoring Cardinal Product Graphs in Polynomial Time." **Discrete Math.** 192 (1998) : 119-144.

W. Imrich and S. Klavzar. **Product Graphs : Structure and Recognition.** Wiley, New York, 2000.

W. S. Chiue and B. S. Shieh. "On Connectivity of the Cartesian Product of Two Graphs." **Appl. Math. and Comput.** 102 (1999) : 129-137.

Z.A. Bottreou, and Y. Metivier "Some remarks on the Kronecker product of Graph." **Inform. Process. Lett**. 8 (1998): 279-286.

ประวัติผู้วิจัย

ประวัติผู้วิจัย

1. ชื่อ สกุล นายบรรจง แก้ววิเศษกุล

2. ตำแหน่งปัจจุบัน ผู้ช่วยศาสตราจารย์

3. หน่วยงาน คณะศิลปศาสตร์ พื้นที่ศาลายา
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลรัตนโกสินทร์
96 หมู่ 3 ต.ศาลายา อ.พุทธมณฑล จ.นครปฐม 73170
โทรศัพท์ 02-889-4585-7 ต่อ 2921-2 มือถือ 087-0888997
โทรสาร 02-889-4585-7 ต่อ 2920
e-mail : bunjong.k@rmutr.ac.th

4. ประวัติการศึกษา ปริญญาโท กศ.ม. (คณิตศาสตร์)
ปริญญาตรี กศ.บ. (คณิตศาสตร์)

1. ชื่อ - นามสกุล นายธานินทร์ สิทธิวิรัชธรรม

2. ตำแหน่งปัจจุบัน รองศาสตราจารย์

3. หน่วยงาน ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ
1518 5 ถนนประชาราษฎร์ 1 แขวงวงศ์สว่าง เขตบางซื่อ กรุงเทพมหานคร
โทรศัพท์ 02-587-8258 มือถือ 0880063809
โทรสาร 02-587-8258
e-mail : tst@kmutnb.ac.th

4. ประวัติการศึกษา ปริญญาโท กศ.ม. (คณิตศาสตร์)
ปริญญาตรี คบ. (คณิตศาสตร์)