ผลเฉลยเชิงดิสทริบิวชันของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n ที่สัมพันธ์กับสมการเบสเซล

โดย

ศศิธร ปัจจุโส

สนับสนุนงบประมาณโดย
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลรัตนโกสินทร์
ประจำปีงบประมาณ 2558

Distributional solutions of nth-order differential equations related to the Bessel equation

By

Sasitorn Putjuso

Granted by
Rajamangala University of Technology Rattanakosin
Fiscal year 2015

กิตติกรรมประกาศ

รายงานวิจัยเรื่อง ผลเฉลยเชิงดิสทริบิวชันของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n ที่สัมพันธ์กับสมการเบสเซล จัดทำขึ้นเพื่อเป็นเอกสารประกอบการรายงานผลการวิจัยสำหรับโครงการวิจัย ประจำปีงบประมาณ พ.ศ.2558 มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลรัตนโกสินทร์ โดยมีเนื้อหาทั้งสิ้น 4 บท ประกอบด้วย บทนำ ทบทวนวรรณกรรมที่เกี่ยวข้อง วิธีการที่ใช้ในการศึกษาวิจัย และผลการวิจัย

หวังเป็นอย่างยิ่งว่ารายงานฉบับนี้คงจะเป็นประโยชน์สำหรับนักศึกษา และผู้ที่สนใจเกี่ยวกับงานวิจัยในด้านทฤษฎีดิสทริบิวชันซึ่งเป็นแขนงหนึ่งของวิชาคณิตศาสตร์ไม่มากก็น้อย

ท้ายที่สุดนี้ ผู้จัดทำขอขอบคุณทุนอุดหนุนโครงการวิจัย ประจำปีงบประมาณ พ.ศ.2558 จากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลรัตนโกสินทร์ ที่ให้การสนับสนุนในด้านทุนวิจัยจนได้งานวิจัยที่เสร็จสมบูรณ์

ผศ.ดร.ศศิธร ปัจจุโส และคณะ
สิงหาคม 2558

บทคัดย่อ

รหัสโครงการ : Inno 007/2558
ชื่อโครงการ : ผลเฉลยเชิงดิสทริบิวชันของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n ที่สัมพันธ์กับสมการเบสเซล
ชื่อนักวิจัย : ผศ.ดร.ศศิธร ปัจจุโส และ ผศ.ดร.คำสิงห์ นนเลาพล

ในการศึกษาวิจัยครั้งนี้ จะเป็นการศึกษาหาผลเฉลยเชิงดิสทริบิวชันของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n ที่สัมพันธ์กับสมการเบสเซลซึ่งอยู่ในรูป

$$x^2 y^{(n)}(x) + xy^{(n-1)}(x) + \left(x^2 - v^2\right) y^{(n-2)}(x) = 0$$

โดยที่ $v \in □, n \geq 2$ และ x เป็นตัวแปรจริง ผลเฉลยเชิงดิสทริบิวชันที่ได้จะอยู่ในรูปของอนุกรมอนันต์ของฟังก์ชันไดแรคเดลตาและอนุพันธ์ของฟังก์ชันไดแรคเดลตา นอกจากนี้เรายังได้พิจารณาผลเฉลยเชิงดิสทริบิวชันดังกล่าวในหลายลักษณะที่น่าสนใจอีกด้วย

คำสำคัญ : ผลเฉลยเชิงดิสทริบิวชัน, สมการเชิงอนุพันธ์, สมการเบสเซล, สังวัตนาการ

E-mail Address : sasitorn.put@rmutr.ac.th

ระยะเวลาโครงการ : 1 ตุลาคม 2557 - 30 กันยายน 2558

Abstract

Code of project : **Inno 007/2558**

Project name : Distributional solutions of *n*th-order differential equations related to the Bessel equation

Researcher name : Asst. Prof. Dr. Sasitorn Putjuso and Asst. Prof. Dr. Kamsing Nonlaopon

In this research, we study the distributional solutions of nth-order differential equation of the form

$$x^2 y^{(n)}(x) + xy^{(n-1)}(x) + \left(x^2 - v^2\right) y^{(n-2)}(x) = 0$$

where $v \in □, n \geq 2$ and x is a real variable. These solutions are obtained in the form of infinite series of the Dirac delta functions and its derivatives. We employ this solution to observe their interesting features.

Keyword: Distributional solution, differential equation, Bessel equation, convolution.

E-mail Address : sasitorn.put@rmutr.ac.th

Period of Project : 1 October 2014 - 30 September 2015

สารบัญ

บทที่ 1
บทนำ

1. ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ทฤษฎีดิสทริบิวชัน (Distribution Theory) แต่ก่อนมีชื่อเรียกอีกอย่างว่า ทฤษฎีของฟังก์ชันวางนัยทั่วไป (theory of the generalized function) ตัวอย่างดิสทริบิวชันที่รู้จักกันเป็นอย่างดี ก็คือ ฟังก์ชันไดแรคเดลตา (Dirac delta function) ที่พอล ไดแรค (Paul A. M. Dirac) นักฟิสิกส์ชาวอังกฤษเป็นคนนิยามขึ้นมาซึ่งถูกนำไปใช้อย่างกว้างขวางในสาขาต่างๆโดยเฉพาะอย่างยิ่งสาขาฟิสิกส์และวิศวกรรมไฟฟ้า

ทฤษฎีดิสทริบิวชันนอกจากได้ถูกนำไปใช้และไปประยุกต์ใช้ในสาขาฟิสิกส์และสาขาวิศวกรรมศาสตร์แล้วทฤษฎีดิสทริบิวชันยังได้รับความสนใจอย่างแพร่หลายในหลายแขนงของสาขาคณิตศาสตร์มาช้านานเพราะการศึกษาทฤษฎีดิสทริบิวชันได้เป็นการเปิดพื้นที่ใหม่ของการวิจัยทางคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นแรงกระตุ้นและผลักดันให้เกิดการพัฒนาทางวิชาการหลายแขนงทางสาขาคณิตศาสตร์ เช่น สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย แคลคูลัสเชิงคำนวณ ทฤษฎีการแปลงและการวิเคราะห์เชิงฟังก์ชัน และโครงข่ายคอมพิวเตอร์ เป็นต้น

ในการศึกษาหาผลเฉลยของสมการเบสเซล

$$x^2y''(x)+xy(x)+\left(x^2-v^2\right)y(x)=0$$

เราทราบว่าผลเฉลยจะอยู่ในรูปของผลเฉลยแบบฉบับ (classical solution) นั่นคือ $J_v(x), J_{-v}(x)$ เมื่อ v ไม่เป็นจำนวนเต็มและ $J_v(x), Y_v(x)$ เมื่อ v เป็นจำนวนเต็ม ต่างก็เป็นผลเฉลยของสมการเบสเซล แต่แท้ที่จริงแล้วผลเฉลยของสมการดังกล่าวยังสามารถเขียนในรูปของผลเฉลยเชิงดิสทริบิวชัน (distributional solution) ได้อีกด้วย

พิจารณาการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ordinary differential equation)

$$Ly=\tau$$

โดยที่ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ L นิยามดังนี้

$$\begin{aligned} L &= a_n(x)\frac{d^n}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{d}{dx}+a_0(x) \\ &= \sum_{m=0}^{n} a_m(x)\frac{d^m}{dx^m} \end{aligned}$$

โดยที่ $a_m(x)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และ τ เป็นดิสทริบิวชัน เราพบว่าดิสทริบิวชัน y เป็นผลเฉลยของสมการข้างต้นถ้าสำหรับทุกฟังก์ชันค่าทดสอบ φ แล้วจะได้ว่า

$$\langle Ly,\varphi\rangle=\langle \tau,\varphi\rangle$$

และผลเฉลย y ของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญสามารถจำแนกได้ดังนี้ คือ

1. ถ้าผลเฉลย y เป็นฟังก์ชันปรับเรียบ (smooth function) แล้วจะเรียก y ว่าเป็น**ผลเฉลยแบบฉบับ** (classical solution)

2. ถ้าผลเฉลย y ไม่เป็นฟังก์ชันปรับเรียบ แต่สอดคล้องกับการดำเนินการทางดิสทริบิวชัน นั่นคือสอดคล้องกับ $\langle Ly,\varphi\rangle = \langle \tau,\varphi\rangle$ แล้วจะเรียก y ว่าเป็น**ผลเฉลยแบบอ่อน** (weak solution)

3. ถ้าผลเฉลย y **เป็นดิสทริบิวชันเอกฐาน** (singular distribution) และสอดคล้องกับข้อ 2. แล้วจะเรียก y ว่าเป็นผลเฉลยเชิงดิสทริบิวชัน (distributional solution)

นอกจากนี้ผลเฉลยทั้งหมดเราเรียกว่า ผลเฉลยวางนัยทั่วไป (generalized solutions)

การหาผลเฉลยของสมการเบสเซลที่เป็นผลเฉลยเชิงดิสทริบิวชันนั้นได้มีการศึกษาแล้วใน [11] โดยกำหนดให้ผลเฉลยอยู่ในรูปของอนุกรมอนันต์

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \delta^{(n)}(x)$$

โดยที่ a_n เป็นสัมประสิทธิ์ และ $\delta^{(n)}(x)$ เป็นอนุพันธ์อันดับ n ของฟังก์ชันไดแรคเดลตา (Dirac delta function) แล้วใช้วิธีการดำเนินการทางดิสทริบิวชันหาผลเฉลย ซึ่งได้ผลเฉลยเชิงดิสทริบิวชันสองผลเฉลยที่อยู่ในรูปของอนุกรมอนันต์ของฟังก์ชันไดแรคเดลตาและอนุพันธ์ของฟังก์ชันไดแรคเดลตา นอกจากนี้ถ้าเรากำหนดค่า v เป็นค่าที่เหมาะสม แล้วจะได้ผลเฉลยที่เป็นอนุกรมจำกัดซึ่งเป็นรูปแบบที่สวยงามและน่าสนใจเป็นอย่างยิ่ง

ในการศึกษาวิจัยครั้งนี้ จะเป็นการศึกษาหาผลเฉลยเชิงดิสทริบิวชันของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n ที่สัมพันธ์กับสมการเบสเซล

$$x^2 y^{(n)}(x) + xy^{(n-1)}(x) + \left(x^2 - v^2\right) y^{(n-2)}(x) = 0$$

โดยที่ $v \in \square, n \geq 2$ โดยการศึกษาวิจัยนี้จะเป็นการขยายแนวความคิดจากสมการเบสเซลซึ่งเป็นการศึกษาสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ *2* เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n และผลเฉลยที่ได้ก็ยังคงเป็นผลเฉลยเชิงดิสทริบิวชันที่มีความน่าสนใจเช่นกัน

การศึกษาผลเฉลยเชิงดิสทริบิวชันของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n ที่สัมพันธ์กับสมการเบสเซล นอกจากจะนำไปประยุกต์ใช้เกี่ยวข้องกับทฤษฎีทางฟิสิกส์และวิศวกรรมศาสตร์ (Mathematical physics and Mathematical Engineering) ดังที่ได้กล่าวมาข้างต้น แล้วยังสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้ในหลายๆแขนงวิชา เช่น Approximation Theory, Probability Theory, Optimization Theory, Operator theory, Quantum filed เป็นต้น ดังนั้นนักคณิตศาสตร์จึงได้ศึกษาและวิจัยในแขนงดังกล่าวกันอย่างต่อเนื่อง เพราะในการคิดค้นทฤษฎีเพื่อหาองค์ความรู้ใหม่ ๆ นั้นนับว่ามีประโยชน์เป็นอย่างมากต่อทางวิชาการและการพัฒนาประเทศ ซึ่งเป็นที่ยอมรับว่าทฤษฎีและองค์ความรู้ใหม่ๆที่เกิดจากการวิจัยนั้น นอกจากจะมีประโยชน์อย่างมากในการพัฒนาความรู้เชิงวิชาการในสาขาและแขนงต่างๆแล้ว บางครั้งยังสามารถนำไปประยุกต์ในสาขาอื่นๆ และเป็นพื้นฐานสำคัญในการพัฒนาทางวิทยาศาสตร์พื้นฐาน (Basic Science) อีกด้วย อันถือเป็นพื้นฐานในการพัฒนาประเทศชาติต่อไป

ดังนั้นการศึกษาทฤษฎีและสมบัติต่าง ๆ ของผลเฉลยเชิงดิสทริบิวชันของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n ที่สัมพันธ์กับสมการเบสเซล ดังกล่าวข้างต้น จะก่อให้เกิดทฤษฎีและองค์ความรู้ใหม่ๆที่

คาดว่าจะได้รับอาจแบ่งเป็นสองแนวทางใหญ่ๆ คือ ทฤษฎีและองค์ความรู้ใหม่ๆเกี่ยวกับการหาเฉลยเชิงดิสทริบิวชันของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n ที่สัมพันธ์กับสมการเบสเซลและการนำเฉลยที่ได้ไปประยุกต์ใช้กับสาขาวิชาอื่นๆ ต่อไป ซึ่งเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการพัฒนาวิชาการในสาขาวิชาที่เกี่ยวข้องอันจะเป็นพื้นฐานในการพัฒนาประเทศต่อไป

2. วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัย

2.1 คิดค้นทฤษฎีและองค์ความรู้ใหม่ๆ เกี่ยวกับผลเฉลยเชิงดิสทริบิวชันของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n ที่สัมพันธ์กับสมการเบสเซล

2.2 นำทฤษฎีและองค์ความรู้ใหม่ๆ เกี่ยวกับผลเฉลยเชิงดิสทริบิวชันของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n ที่ได้ไปประยุกต์ใช้กับสมการรูปแบบต่างๆ

3. ขอบเขตของโครงการวิจัย

ในการศึกษาวิจัยครั้งนี้ จะเป็นการศึกษาหาผลเฉลยเชิงดิสทริบิวชันของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n ที่สัมพันธ์กับสมการเบสเซล

$$x^2 y^{(n)}(x) + xy^{(n-1)}(x) + \left(x^2 - v^2\right) y^{(n-2)}(x) = 0$$

โดยที่ $v \in \square, n \geq 2$ โดยการศึกษาวิจัยนี้จะเป็นการขยายแนวความคิดจากสมการเบสเซลซึ่งเป็นการศึกษาสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ *2* เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n และผลเฉลยที่ได้ก็ยังคงเป็นผลเฉลยเชิงดิสทริบิวชันที่มีความน่าสนใจเช่นกัน

4. ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

4.1 ได้ความรู้และทฤษฎีใหม่ๆที่เกี่ยวกับผลเฉลยเชิงดิสทริบิวชันของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n สัมพันธ์กับสมการเบสเซล

4.2 ประยุกต์ใช้ผลเฉลยเชิงดิสทริบิวชันของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n ที่ได้กับสมการรูปแบบต่างๆ

4.3 ผลงานตีพิมพ์ในระดับนานาชาติเพื่อเป็นการเผยแพร่ผลงานและชื่อเสียงของนักคณิตศาสตร์ไทย

บทที่ 2
วรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ก่อนที่จะมีการสร้างทฤษฎีดิสทริบิวชันขึ้น ดิสทริบิวชันได้ถูกนำไปใช้และถูกอ้างอิงถึงบ่อย ๆ โดยนักฟิสิกส์และนักวิศวกร ตัวอย่างเช่น ฟังก์ชันไดแรคเดลตา และอนุพันธ์ของฟังก์ชันไดแรคเดลตา ทฤษฎีดิสทริบิวชันถูกสร้างขึ้นครั้งแรก โดย S. L. Sobolev [21] ในปี ค.ศ. 1936 ซึ่งได้แนะนำนิยาม และระบบของดิสทริบิวชัน และต่อมาได้ถูกพัฒนาทางด้านทฤษฎีโดย L. Schwartz [20] และแต่งเป็นหนังสือ ถูกเผยแพร่ในปี 1950 และ 1951 หลังจากนั้นก็ได้มีการศึกษาทฤษฎีและสมบัติต่างๆ มากมายของดิสทริบิวชันตามมา ตัวอย่างเช่น ในปี 1961 H. J. Bremermann และ L. Durand [1] ได้ศึกษาเกี่ยวกับการแปลงฟูเรียร์ของดิสทริบิวชัน C. F. Rehberge [10.19] ได้นำเอาทฤษฎีดิสทริบิวชันที่ศึกษามาไปประยุกต์ใช้เกี่ยวกับวิศวกรรมไฟฟ้า ในปี 1962 J. Mikusinski [17] และ A. Erdelyi [5] ได้ศึกษาเกี่ยวกับแคลคูลัส และการดำเนินการต่าง ๆ ของดิสทริบิวชัน R. Courant [3] ได้นำเอาทฤษฎีดิสทริบิวชันไปช่วยในการหาผลเฉยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยและได้มีการนิยามและหาผลคูณระหว่างดิสทริบิวชันสองดิสทริบิวชันขึ้นมาโดย J. Mikusinski [16]

หลังจากนั้นในปี ค.ศ. 1964 ก็ได้มีการศึกษาการหาผลการแปลงฟูเรียร์ ลักษณะเฉพาะของดิสทริบิวชันและอัลตราดิสทริบิวชัน ซึ่งเป็นส่วนของทฤษฎีขั้นสูงของทฤษฎีดิสทริบิวชัน โดยสองนักคณิตศาสตร์ชาวรัสเซีย คือ I. M. Gelfand และ G. E. Shilov [6] ในส่วนของการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์นั้น เราทราบว่าเมื่อไม่นานมานี้ได้มีการพิจารณาศึกษาปัญหาการมีผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญในปริภูมิของฟังก์ชันวางนัยทั่วไปและการประยุกต์ใช้วิธีการทางทฤษฎีดิสทริบิวชันในการศึกษาทางด้านฟิสิกส์เชิงคณิตศาสตร์ ทฤษฎีของอนุพันธ์ย่อย พลศาสตร์ควอนตัม แคลคูลัสเชิงการดำเนินการ และการวิเคราะห์เชิงฟังก์ชัน

ในปัจจุบันการวิจัยทางด้านสมการเชิงอนุพันธ์สามัญยังมีการพัฒนาไม่เพียงพอและมีข้อจำกัดในการหาผลเฉลยสำหรับสมการอันดับสองหรือระบบที่มีอันดับสูงขึ้นเป็นที่รู้กันดีว่าระบบเอกพันธุ์เชิงเส้นปกติของสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์ปรับเรียบอนันต์จะไม่มีผลเฉลยเชิงดิสทริบิวชัน แต่อย่างไรก็ตามผลเฉลยเชิงดิสทริบิวชันสามารถจะปรากฏได้ในกรณีที่สมการมีสัมประสิทธิ์เป็นเอกฐาน ตัวอย่างเช่น สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง

$$x^2\frac{dy}{dx}-2y=0$$

ที่ $x=0$ จะอยู่ในภาวะเอกฐานที่จำเป็นของสมการข้างต้น และมีผลเฉลยคืออนุกรมอนันต์

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}\,\delta^{(n)}(x)}{n!(n+1)!}$$

แม้ว่าอนุกรมอนันต์ข้างต้นจะไม่นิยามดิสทริบิวชัน แต่ Kim และ Kwon [12] ได้แสดงแล้วว่าอนุกรมดังกล่าวนิยามฟังก์ชันเกิน (hyperfunction) ในปี ค.ศ.1982 Wiener [22] ได้ศึกษาสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีสัมประสิทธ์เป็นเอกฐานแบบต่างๆ และได้หาผลเฉลยเชิงดิสทริบิวชันของสมการเชิง

อนุพันธ์ดังกล่าวด้วย ต่อมา Wiener และ Shah [26] ได้ศึกษางานวิจัยเกี่ยวกับผลเฉลยเชิงดิสทริบิวชันรวมทั้งศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างผลเฉลยเชิงดิสทริบิวชันและผลเฉลยทั้งหมด (entire solution) ของสมการอนุพันธ์เชิงเส้นสามัญเชิงเส้น

ในปี ค.ศ.1987 Littlejohn และ Kanwal [15] ได้ศึกษาผลเฉลยเชิงดิสทริบิวชันของสมการเชิงอนุพันธ์ไฮเพอร์จีออเมตริก ซึ่งผลเฉลยที่ได้จะอยู่ในรูปแบบอนุกรมอนันต์ของฟังก์ชันไดแรคเดลตาและอนุพันธ์ของฟังก์ชันไดแรคเดลตา นอกจากนี้สำหรับการศึกษาผลเฉลยที่อยู่ในรูปแบบอนุกรมอนันต์ของฟังก์ชันเดลตาและอนุพันธ์ของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญสามารถศึกษาได้จากผลงานของ Morton และ Krall [18], Krall [13], Littlejohn [14], Wiener และ Cooke [2,24,25] และ Hernandez-Estrada [6] เมื่อไม่นานมานี้ Intason และ Nonlaopon [8] ได้ศึกษาผลเฉลยเชิงดิสทริบิวชันของสมการเชิงอนุพันธ์

$$xy^{(n)}(x)+\left(p+q\right)y^{(n-1)}(x)-xy^{(n-2)}(x)-py^{(n-3)}(x)=0$$

โดยที่ $p,q\in\square\,,n\geq 3$ และ x เป็นตัวแปรจริงใดๆ ซึ่งเป็นการขยายแนวความคิดของ Kamke [9] ที่ศึกษาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 3 และผลเฉลยที่ได้ก็เป็นผลเฉลยเชิงดิสทริบิวชันเช่นกัน ในการศึกษาวิจัยครั้งนี้ จะเป็นการศึกษาหาผลเฉลยเชิงดิสทริบิวชันของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n ที่สัมพันธ์กับสมการเบสเซล

$$x^2y^{(n)}(x)+xy^{(n-1)}(x)+\left(x^2-v^2\right)y^{(n-2)}(x)=0$$

เมื่อ $v\in\square\,,n\geq 2$ โดยการศึกษาวิจัยนี้จะเป็นการขยายแนวความคิดจากสมการเบสเซลซึ่งเป็นการศึกษาสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 2 เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n และผลเฉลยที่ได้ก็ยังเป็นผลเฉลยเชิงดิสทริบิวชันที่มีความน่าสนใจ

บทที่ 3
วิธีการดำเนินงานวิจัย

วิธีการดำเนินงานวิจัยมี 5 ขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. ศึกษาหาความรู้เกี่ยวกับการนิยามและทฤษฎีบทต่าง ๆของผลเฉลยเชิงดิสทริบิวชันของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n จากเอกสารที่เกี่ยวข้องเพื่อเป็นแนวทางในการศึกษาผลเฉลยเชิงดิสทริบิวชันของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n ที่สัมพันธ์กับสมการเบสเซลต่อไป

2. ค้นคว้าหาเอกสาร ตำรา วารสาร และ เอกสารสิ่งพิมพ์ที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยที่กำลังดำเนินการวิจัยอยู่จากต่างๆ

3. โดยการอาศัยความรู้พื้นฐานที่ได้จากการศึกษาตามระเบียบวิธีตามข้อ 1 – 2 และประสบการณ์ที่ได้จากการแลกเปลี่ยนความคิดเห็นและปรึกษากับนักวิจัยชาวต่างประเทศที่มีความเชี่ยวชาญด้านการหาผลเฉลยเชิงดิสทริบิวชันของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n และหาแนวทางในการคิดค้นทฤษฎีใหม่ๆที่เกี่ยวกับการหาผลเฉลยเชิงดิสทริบิวชันของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n ที่สัมพันธ์กับสมการเบสเซลตามวัตถุประสงค์ที่กำหนดไว้ในหัวข้อ 1 – 2

4. สร้างและพิสูจน์ทฤษฎีบทเกี่ยวกับการหาผลเฉลยเชิงดิสทริบิวชันของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n ที่สัมพันธ์กับสมการเบสเซล

5. สรุปผล เตรียมเอกสารสำหรับการตีพิมพ์ และเขียนรายงานการวิจัย

บทที่ 4
ผลการทดลองและการวิเคราะห์ผล

<u>ทฤษฎีบท 1</u>. สมมติให้ $w(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\delta^{(k)}(x)$ เป็นผลเฉลยเชิงดิสทริบิวชันอันดับ n ของสมการเชิงอนุพันธ์

$$x^2y^{(n)}(x)+xy^{(n-1)}(x)+\left(x^2-v^2\right)y^{(n-2)}(x)=0 \qquad (1)$$

โดยที่ $p\geq 0,n\geq 2,b>0$ และ x เป็นตัวแปรจริง แล้ว

(i) ถ้า $n=2$ จะได้ว่า

$$w_1(x)=a_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\prod_{j=1}^{k}(2j-1-v)\prod_{j=1}^{k}(2j-1+v)}{(2k)!}\delta^{(2k)}(x) \qquad (2)$$

และ

$$w_2(x)=a_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\prod_{j=1}^{k}(2j-v)\prod_{j=1}^{k}(2j+v)}{(2k+1)!}\delta^{(2k+1)}(x) \qquad (3)$$

(ii) ถ้า $n=3$ จะได้ว่า

$$w(x)=a_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\prod_{j=1}^{k}(2j-v)\prod_{j=1}^{k}(2j+v)}{(2k+1)!}\delta^{(2k)}(x) \qquad (4)$$

(iii) ถ้า $n=4$ จะได้ว่า

$$w(x)\equiv 0 \qquad (5)$$

<u>พิสูจน์</u> ขั้นแรกจะประยุกต์ใช้แนวคิดพื้นฐานของทฤษฎีดิสทริบิวชัน คือ ใช้ฟังก์ชันค่าทดสอบ $\phi(x)\in D(\square)$ พิจารณา

$$\left\langle x^2y^{(n)}+xy^{(n-1)}+\left(x^2-v^2\right)y^{(n-2)},\phi\right\rangle$$

$$=\left\langle x^2y^{(n)},\phi\right\rangle+\left\langle xy^{(n-1)},\phi\right\rangle+\left\langle\left(x^2-v^2\right)y^{(n-2)},\phi\right\rangle \qquad (6)$$

ในที่นี้

$$\left\langle x^2y^{(n)},\phi\right\rangle=\left\langle y^{(n)},x^2\phi\right\rangle=(-1)^{(n)}\left\langle y,\left(x^2\phi\right)^{(n)}\right\rangle$$

$$=(-1)^{(n)}\left\langle y,x^2\phi^{(n)}+2nx\phi^{(n-1)}+n(n-1)\phi^{(n-2)}\right\rangle \qquad (7)$$

$$\left\langle xy^{(n-1)},\phi\right\rangle = \left\langle y^{(n-1)},x\phi\right\rangle = (-1)^{(n-1)}\left\langle y,(x\phi)^{(n-1)}\right\rangle$$
$$= (-1)^{(n-1)}\left\langle y, x\phi^{(n-1)} + (n-1)\phi^{(n-2)}\right\rangle \quad (8.)$$

และ

$$\left\langle (x^2-v^2)y^{(n-2)},\phi\right\rangle = \left\langle y^{(n-2)},(x^2-v^2)\phi\right\rangle = (-1)^{(n-2)}\left\langle y,\left((x^2-v^2)\phi\right)^{(n-2)}\right\rangle$$
$$= (-1)^{(n-2)}\left\langle y,(x^2-v^2)\phi^{(n-2)} + 2(n-2)x\phi^{(n-3)} + (n-2)(n-3)\phi^{(n-4)}\right\rangle \quad (9)$$

ต่อไป จะแทนอนุกรม $y(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k\delta^{(k)}(x)$ ในทางขวามือของ (7) ถึง (9) จะได้ว่า

$$\left\langle x^2y^{(n)},\phi\right\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\left\langle (k+n)(k+n-1)\delta^{(k+n-2)}(x),\phi\right\rangle$$
$$\left\langle xy^{(n-1)},\phi\right\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\left\langle -(k+n-1)\delta^{(k+n-2)}(x),\phi\right\rangle$$

และ

$$\left\langle (x^2-v^2)y^{(n-2)},\phi\right\rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} a_k\left[k(k-1)+2(n-2)k+(n-2)(n-3)\right]\delta^{(k+n-4)}(x),\phi\right\rangle$$
$$-\left\langle \sum_{k=0}^{\infty} a_k v^2\delta^{(k+n-2)}(x),\phi\right\rangle$$

แทนค่าใน (6) จะได้

$$\left\langle x^2y^{(n)}+xy^{(n-1)}+(x^2-v^2)y^{(n-2)},\phi\right\rangle$$
$$=\left\langle \sum_{k=0}^{\infty}\left[a_k(k+n-1-v)(k+n-1+v)+a_{k+2}(k+n)(k+n-1)\right]\delta^{(k+n-2)}(x),\phi\right\rangle$$
$$+\left\langle a_0(n-2)(n-3)\delta^{(n-4)}+a_1(n-2)(n-1)\delta^{(n-3)},\phi\right\rangle \quad (10)$$

จาก (10) ทำให้ได้ว่า ถ้า $y(x)$ เป็นผลเฉลยของ (1) ดังนั้นสำหรับ $k=0,1,2,\ldots,$ จะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$a_k(k+n-1-v)(k+n-1+v)+a_{k+2}(k+n)(k+n-1)=0 \quad (11)$$

เพื่อที่จะหาสัมประสิทธิ์ a_{k+2} เราจะพิจารณาทั้ง 3 กรณีดังต่อไปนี้

กรณี 1. ถ้า $n>3$ แล้ว $(n-2)(n-3)\neq 0$ และ $(n-2)(n-1)\neq 0$ ดังนั้น

$$a_{k+2} = -a_k\frac{(k+n-1-v)(k+n-1+v)}{(k+n)(k+n-1)} \quad (12)$$

แต่เนื่องจาก $a_0=0$ และ $a_1=0$ เราพบว่า $a_{k+2}=0$ สำหรับทุกๆ $k\ge 0$ ดังนั้น $y(x)=0$

กรณี 2. ถ้า $n=2$ แล้ว $a_0\ne 0$ และ $a_1\ne 0$ จะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$a_{k+2}=-a_k\frac{(k+1-v)(k+1+v)}{(k+2)(k+1)} \tag{13}$$

จากความสัมพันธ์เวียนเกิด (13) พิจารณา

$$a_2=-a_0\frac{(1-v)(1+v)}{1\cdot 2}$$

$$a_4=-a_2\frac{(3-v)(3+v)}{3\cdot 4}=a_0\frac{(1-v)(3-v)(1+v)(3+v)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

$$a_6=-a_4\frac{(5-v)(5+v)}{5\cdot 6}=-a_0\frac{(1-v)(3-v)(5-v)(1+v)(3+v)(5+v)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$$

$$\vdots$$

$$a_{2r}=(-1)^r a_0\frac{(1-v)(3-v)\cdots(2r-1-v)(1+v)(3+v)\cdots(2r-1+v)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 2r}$$

$$=(-1)^r a_0\frac{\prod_{j=1}^{r}(2j-1-v)\prod_{j=1}^{r}(2j-1+v)}{(2r)!}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$a_3=-a_1\frac{(2-v)(2+v)}{2\cdot 3}$$

$$a_5=-a_3\frac{(4-v)(4+v)}{4\cdot 5}=a_1\frac{(2-v)(4-v)(2+v)(4+v)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$

$$a_7=-a_5\frac{(6-v)(6+v)}{6\cdot 7}=-a_1\frac{(2-v)(4-v)(6-v)(2+v)(4+v)(6+v)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}$$

$$\vdots$$

$$a_{2r+1}=(-1)^r a_1\frac{(2-v)(4-v)\cdots(2r-v)(2+v)(4+v)\cdots(2r+v)}{2\cdot 3\cdot 4\cdots(2r+1)}$$

$$=(-1)^r a_1\frac{\prod_{j=1}^{r}(2j-v)\prod_{j=1}^{r}(2j+v)}{(2r+1)!}$$

ดังนั้นจะได้ผลเฉลย

$$y_1(x)=a_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\prod_{j=1}^{k}(2j-1-v)\prod_{j=1}^{k}(2j-1+v)}{(2k)!}\delta^{(2k)}(x) \tag{14}$$

และ

$$y_2(x)=a_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\prod_{j=1}^{k}(2j-v)\prod_{j=1}^{k}(2j+v)}{(2k+1)!}\delta^{(2k+1)}(x) \tag{15}$$

กรณี 3. ถ้า $n=3$ แล้ว $a_0\neq 0$ และ $a_1=0$ เราจะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$a_{k+2}=-a_r\frac{(k+2-v)(k+2+v)}{(k+3)(k+2)} \tag{16}$$

จากความสัมพันธ์เวียนเกิด (16) เราจะพิจารณา

$$a_2=-a_0\frac{(2-v)(2+v)}{3\cdot 2}$$

$$a_4=-a_2\frac{(4-v)(4+v)}{5\cdot 4}=a_0\frac{(2-v)(4-v)(2+v)(4+v)}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}$$

$$a_6=-a_4\frac{(6-v)(6+v)}{7\cdot 6}=-a_0\frac{(2-v)(4-v)(6-v)(2+v)(4+v)(6+v)}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}$$

$$\vdots$$

$$a_{2r}=(-1)^r a_0\frac{(2-v)(4-v)\cdots(2r-v)(2+v)(4+v)\cdots(2r+v)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(2r+1)}$$

$$=(-1)^r a_0\frac{\prod_{j=1}^{r}(2j-v)\prod_{j=1}^{r}(2j+v)}{(2r+1)!}$$

ดังนั้นจะได้ผลเฉลย

$$y(x)=a_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\prod_{j=1}^{k}(2j-v)\prod_{j=1}^{k}(2j+v)}{(2k+1)!}\delta^{(2k)}(x) \tag{17}$$

<u>บทแทรก 1</u>. กำหนดให้ m เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนลบ แล้วผลเฉลยเชิงดิสทริบิวชันของสมการเชิงอนุพันธ์

$$x^2y''(x)+xy'(x)+\left(x^2-(m+1)^2\right)y(x)=0 \tag{18}$$

จะอยู่ในรูป

$$y(x)=C\sum_{k=0}^{[m/2]}\frac{(m-k)!}{4^k k!(m-2k)!}\delta^{(m-2k)}(x) \qquad (19)$$

โดยที่ C เป็นค่าคงตัว

<u>บทแทรก 2</u>. ให้ q เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ แล้วผลเฉลยเชิงดิสทริบิวชันของสมการเชิงอนุพันธ์

$$x^2y'''(x)+xy''(x)-\left(x^2+(q+1)^2\right)y'(x)=0 \qquad (20)$$

จะอยู่ในรูป

$$y(x)=C\sum_{k=0}^{\frac{q-1}{2}}\frac{(q-k)!}{4^k k!(q-2k)!}\delta^{(q-(2k+1))}(x) \qquad (21)$$

โดยที่ C เป็นค่าคงตัว

<u>ตัวอย่าง 1</u>. ถ้า $b=1$ จะได้สมการ (1) เป็นสมการเบสเซล

1. สำหรับ $p=1$ สมการ (1.) จะได้ว่า

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-1\right)y=0 \qquad (22)$$

จาก (2.) จะได้ผลเฉลยคือ $y_0=a_0\delta(x)$

2. สำหรับ $p=2$ สมการ (1) จะได้ว่า

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-4\right)y=0 \qquad (23)$$

จาก (2.) จะได้ผลเฉลยคือ $y_1=a_0\delta'(x)$

3. สำหรับ $p=3$ สมการ (1) จะได้ว่า

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-9\right)y=0 \qquad (24)$$

จาก (2) จะได้ผลเฉลยคือ

$$\begin{aligned}y_2(x)&=C\sum_{k=0}^{1}\frac{(2-k)!}{4^k k!(2-2k)!}\delta^{(2-2k)}(x)\\&=4a_0\left(\frac{1}{4}\delta(x)+\delta''(x)\right)\\&=a_0\left(\delta(x)+4\delta''(x)\right)\end{aligned}$$

4. สำหรับ $p=1$ สมการ (1) จะได้ว่า

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-16\right)y=0 \qquad (25)$$

จาก (2) จะได้ผลเฉลยคือ

$$y_3(x)=C\sum_{k=0}^{1}\frac{(3-k)!}{4^k k!(3-2k)!}\delta^{(3-2k)}(x)$$
$$=2a_1\left(\frac{1}{2}\delta'(x)+\delta'''(x)\right)$$
$$=a_1\left(\delta'(x)+2\delta'''(x)\right)$$

5. สำหรับ $p=1$ สมการ (1) จะได้ว่า

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-25\right)y=0 \tag{26}$$

จาก (2) จะได้ผลเฉลยคือ

$$y_4(x)=C\sum_{k=0}^{2}\frac{(4-k)!}{4^k k!(4-2k)!}\delta^{(4-2k)}(x)$$
$$=16a_0\left(\frac{1}{16}\delta(x)+\frac{3}{4}\delta''(x)+\delta^{(4)}(x)\right)$$
$$=a_0\left(\delta(x)+12\delta''(x)+16\delta^{(4)}(x)\right)$$

6. สำหรับ $p=1$ สมการ (1.) จะได้ว่า

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-36\right)y=0 \tag{27}$$

จาก (2) จะได้ผลเฉลยคือ

$$y_5(x)=C\sum_{k=0}^{2}\frac{(5-k)!}{4^k k!(5-2k)!}\delta^{(5-2k)}(x)$$
$$=\frac{16}{3}a_1\left(\frac{3}{16}\delta'(x)+\delta'''(x)+\delta^{(5)}(x)\right)$$
$$=a_1\left(\delta'(x)+\frac{16}{3}\delta'''(x)+\frac{16}{3}\delta^{(5)}(x)\right)$$

7. สำหรับ $p=1$ สมการ (1.) จะได้ว่า

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-49\right)y=0 \tag{28}$$

จาก (2) จะได้ผลเฉลยคือ

$$y_6(x)=C\sum_{k=0}^{3}\frac{(6-k)!}{4^k k!(6-2k)!}\delta^{(6-2k)}(x)$$

$$= 64a_0\left(\frac{1}{64}\delta(x)+\frac{3}{8}\delta''(x)+\frac{5}{4}\delta^{(4)}(x)+\delta^{(6)}(x)\right)$$

$$= a_0\left(\delta(x)+24\delta''(x)+80\delta^{(4)}(x)+64\delta^{(6)}(x)\right)$$

บทที่ 5
สรุปผลงานวิจัยและข้อเสนอแนะ

<u>**ทฤษฎีบท 1**</u>. สมมติให้ $w(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\delta^{(k)}(x)$ เป็นผลเฉลยเชิงดิสทริบิวชันอันดับ n ของสมการเชิงอนุพันธ์

$$x^2y^{(n)}(x)+xy^{(n-1)}(x)+\left(x^2-v^2\right)y^{(n-2)}(x)=0$$

โดยที่ $p\geq 0, n\geq 2, b>0$ และ x เป็นตัวแปรจริง แล้ว

(i) ถ้า $n=2$ จะได้ว่า

$$w_1(x)=a_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\prod_{j=1}^{k}(2j-1-v)\prod_{j=1}^{k}(2j-1+v)}{(2k)!}\delta^{(2k)}(x)$$

และ

$$w_2(x)=a_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\prod_{j=1}^{k}(2j-v)\prod_{j=1}^{k}(2j+v)}{(2k+1)!}\delta^{(2k+1)}(x)$$

(ii) ถ้า $n=3$ จะได้ว่า

$$w(x)=a_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\prod_{j=1}^{k}(2j-v)\prod_{j=1}^{k}(2j+v)}{(2k+1)!}\delta^{(2k)}(x)$$

(iii) ถ้า $n=4$ จะได้ว่า

$$w(x)\equiv 0$$

<u>**บทแทรก 1**</u>. กำหนดให้ m เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนลบ แล้วผลเฉลยเชิงดิสทริบิวชันของสมการเชิงอนุพันธ์

$$x^2y''(x)+xy'(x)+\left(x^2-(m+1)^2\right)y(x)=0$$

จะอยู่ในรูป

$$y(x)=C\sum_{k=0}^{[m/2]}\frac{(m-k)!}{4^k k!(m-2k)!}\delta^{(m-2k)}(x)$$

โดยที่ C เป็นค่าคงตัว

<u>**บทแทรก 2**</u>. ให้ q เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ แล้วผลเฉลยเชิงดิสทริบิวชันของสมการเชิงอนุพันธ์

$$x^2 y'''(x) + xy''(x) - \left(x^2 + (q+1)^2\right) y'(x) = 0$$

จะอยู่ในรูป

$$y(x) = C\sum_{k=0}^{\frac{q-1}{2}} \frac{(q-k)!}{4^k k!(q-2k)!} \delta^{(q-(2k+1))}(x)$$

โดยที่ C เป็นค่าคงตัว

บรรณานุกรม

[1] H. J. Bremermann and L. Durand, Fourier transform of the distributions, Academic Press, New York, 1961.

[2] K. L. Cooke, J. Wiener, Distributional and analytics solutions of functional differential equations, J. Math. Anal. Appl., 98(1984), 111-129.

[3] R. Courant, Method of Mathematical Physics, Vol.II, Partial differential equations, Interscience Publishers, Inc., New York, 1962

[4] N. F. Donoghue, Distributions and Fourier Transforms, Academic Press, New York, 1969.

[5] A. Erdelyi, Operational Calculus and Generalized function, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1962.

[6] I. M. Gelfand และ G. E. Shilov, Generalized functions, Vol. I and II, Academic Press, New York, 1964.

[7] L. G. Hernandez-Urena, R. Estrada, Solutions of ordinary differential equations by series of delta functions, J. Math. Anal. Appl., 191(1995), 40-55.

[8] P. Intason, K. Nonlaopon, On the distributional solutions of some *n*th-order differential equations, Submitted for publication.

[9] E. Kamke, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Akademishche Verlagsge-sellschaft, Greest & PortigK. G. Leipzig,1959.

[10] A. Kaneko, Introduction to Hyperfunctions, Kluwer Press, Boston, 1989.

[11] R. P. Kanwal, Generalized Functions: Theory and Technique, Academic Press, NewYork, 1983.

[12] S. S. Kim, K. H. Kwon, Generalized weights for orthogonal polynomails, Differ. Integral Equ, 4(1991), 601-608.

[13] A. M. Krall, Orthogonal polynomials satisfying fourth order differential equation, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect., 87(1981), 271-288.

[14] L. L. Littlejohn, On the classification of differential equations having orthogonal polynomial solutions, Ann. Mat. Pura Appl., 138(1984), 35-53.

[15] L. L. Littlejohn, R. P. Kanwal, Distributional solutions of the hypergeomatric differential equation, J. Math. Anal. Appl., 122(1987), 325-345.

[16] J. Mikusinski, Criteria of the existence and the associativity of the product of distributions, Studia Math. 81(1962), 253-259.

[17] J. Mikusinski, Operational Calculus, Pergamon Press, New York, 1959.

[18] R. D. Morton, A. M. Krall, Distributional weight functions for orthogonal polynomials, SIAM J. Math. Anal., 9(1978), 604-626.

[19] C. F. Rehberge, The theory of generalized functions for the electrical engineers, NYU Dept. Elec. Eng. Tech. Repl., (1961), 400–4002.

[20] L. Schwartz, Theorie des distributions, Vol.1 and 2., Actualites Scientifiques et Industrielles, Hermann & Cie, Paris, 1957, 1959.

[21] S. L. Sobolev, Methode nouvelle a resoudre le probleme de Cauchy pour les equations lineaires hyperboliques normales, Mat. Sb., 1(1936), 39 – 72.

[22] J. Wiener, Generalized-function solutions of the differential and functional differential equations, J. Math. Anal. Appl., 88(1982), 170-182.

[23] J. Wiener, Generalized Solutions of Functional Differential Equations, World Scientific, Singapore, 1993.

[24] J. Wiener, K. L. Cooke, Coexistence of analytic and distributional solutions of linear differential equationsl, J. Math. Anal. Appl., 148(1990), 390-421.

[25] J. Wiener, K. L. Cooke, S. M. Shah, Coexistence of analytic and distributional solutions of linear differential equations II, J. Math. Anal. Appl., 159(1991), 271-289.

[26] J. Wiener, S. M. Shah, Distributional and entire solutions of ordinary differential and functional differential equations, Int. J. Math. Math. Sci., 6(1983), 243-270.

ประวัติผู้วิจัย

1. ชื่อ – สกุล ผศ.ดร.ศศิธร ปัจจุโส

2. ตำแหน่ง ผู้ช่วยศาสตราจารย์

3. สังกัด สาขาวิชาศึกษาทั่วไป-คณิตศาสตร์ คณะศิลปศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลรัตนโกสินทร์ วิทยาเขตวังไกลกังวล กระทรวงศึกษาธิการ อำเภอหัวหิน จังหวัดประจวบคีรีขันธ์ เบอร์โทร 032-618500 ต่อ 4053 Email: sasitorn.put@rmutr.ac.th

4. ประวัติการศึกษา

ปีที่จบการศึกษา	ระดับปริญญา	ชื่อย่อปริญญา	สาขาวิชา	สถาบันการศึกษา	ประเทศ
2551	ปริญญาเอก	ปร.ด.	คณิตศาสตร์ประยุกต์	มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี	ไทย
2545	ปริญญาโท	วท.ม.	คณิตศาสตร์	มหาวิทยาลัยขอนแก่น	ไทย
2542	ปริญญาตรี	วท.บ.	คณิตศาสตร์	มหาวิทยาลัยขอนแก่น	ไทย

5. สาขาวิชาการที่มีความชำนาญพิเศษ

-ทฤษฎีดิสทริบิวชันและสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

-คณิตศาสตร์เชิงตัวเลข(ไฟไนต์เอลิเมนต์และไฟไนต์ดิฟเฟอร์เรนท์)

-ทฤษฎีกึ่งกลุ่ม

-คณิตศาสตร์ศึกษา(การศึกษาชั้นเรียน)

6. **ประสบการณ์ที่เกี่ยวข้องกับการบริหารงานวิจัย**

- หัวหน้าโครงการวิจัย : ชื่อโครงการวิจัย

1.เรื่อง“การแสดงท่าทางในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ในวิธีการแบบเปิด” ระยะเวลา 1 มกราคม 2552 ถึง 31 ธันวาคม 2553 แหล่งทุน ศูนย์ความเป็นเลิศด้านคณิตศาสตร์

2.เรื่อง“การพัฒนาปฏิบัติการกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์สำหรับชั้นเรียนอนุบาล” ระยะเวลา 6 กรกฎาคม 2554 ถึง 5 กรกฎาคม 2555 แหล่งทุน ศูนย์ความเป็นเลิศด้านคณิตศาสตร์

-ผลงานวิจัยตีพิมพ์ในวารสารนานาชาติ:

1.Sasitorn Pasjuso, Supot Seebut, Sampan Thinwiangthong and Yanin Kongthip, The Effect of Lesson study and open approach on gestural and verbal communication in mathematics classroom, Far East Journal of Mathematical Education Volume 5, Number 2, (2010) 107-117

2.Montri Thongmoon and Sasitorn Pasjuso, The numerical solutions of differential transform method and the Laplace transform method for a system of differential equations, Nonlinear Analysis:Hybrid System, (2010) 4425-4431

3.Supot Seebut and Sasitorn Pasjuso, Activities Based Teaching Strategies for Pre-Kindergarten Mathematics, Far East Journal of Mathematical Education Volume 9, Number 2, (2012) 151-159

-ผลงานวิจัยนำเสนอในงานประชุมวิชาการระดับชาติ:

Pongphan Mukwachi, Pairin Suwannasri, Sasitorn pasjuso and Supot Seebut, A Comparison of Three Numerical Approaches for Solving the Two-Dimension Unsteady Advection-Diffusion Equation, The 17th Annual Meeting in Mathematics (AMM 2012), April 26–27, 2012

-บทความวิชาการ เรื่อง "ทฤษฎีความอลวนกับอุตุนิยมวิทยา" ว.วิทยาศาสตร์ มข. ฉบับที่1 ปีที่ 40 (มกราคม –มีนาคม 2555)